PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 5 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 8 décembre 2018

Durée du devoir : 4h00

<u>EXERCICE 1</u> : Equation différentielle linéaire d'ordre 2

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$.
2. Donner une solution particulière à valeurs complexes des équations différentielles $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{(1+5i)t}$ et $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{(1-i)t}$.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^t \sin(2t)\cos(3t)$.
   On pourra utiliser la formule $\sin(a) \times \cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$.

<u>EXERCICE 2</u> : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$.

1. Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$.
2. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'on a $\ell > 1$ et $\ell = \dfrac{\ell^2 + \ell}{2}$. En déduire une contradiction.
   (b) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$.

4. **Étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
   (a) En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$, montrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq (u_n)^2$.
   (c) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} \leq v_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln(2)$.
   (d) En déduire que : $\forall n \geq 1,\ v_n \leq v_0 + \ln(2) \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
   (e) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
5. **Vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.** On note $\alpha = \lim v_n$.
   (a) Montrez que : $\forall x > 0,\ \ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}u_n}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \dfrac{1}{u_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{n+k}}$.
   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \alpha - v_n \leq \dfrac{1}{2^n u_n}$.
   (e) Exprimez u_n en fonction de v_n puis montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{\alpha 2^n}$.

<u>EXERCICE 3</u> : Étude d'une suite implicite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif de l'exercice est d'étudier les solutions des équations

$$(E_n) : \ln x + x = n$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. **Etude de la suite des solutions.**

   (a) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, et que celle-ci appartient au segment $[1, n]$.

   Dans la suite de l'exercice, cette solution sera notée x_n.

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$.

   (d) En déduire $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$.

2. **Développement asymptotique de x_n.**

   (a) Donner un équivalent simple de $\ln(x_n)$.

   (b) En déduire que $x_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

   (c) Montrer que $x_n - n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

3. **Approximation numérique de x_n.**

   Dans cette question, l'entier n est fixé.

   (a) Montrer que : $\forall x \geq 1$, $\ln(x) \leq x - 1$.

   Soit $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = n - \ln(x)$.

   (b) Montrer que g est décroissante et que x_n est le seul point fixe de g.

   (c) Soit $a \in [1, n]$ et (u_k) la suite définie par :

   $$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = g(u_k) = n - \ln(u_k) \end{cases}$$

   Montrer que la suite (u_k) est bien définie et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \in [1, n]$.

   (d) Montrer que la fonction $g \circ g$ est définie et croissante sur l'intervalle $[1, n]$.
   Si $u_0 \leq u_2$, montrer que (u_{2k}) est croissante et (u_{2k+1}) est décroissante.
   Traiter de même le cas $u_0 > u_2$.
   Conclure que les suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont convergentes.

   (e) On pose $\alpha = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_{2k}$ et $\beta = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_{2k+1}$.
   Justifier que $(\alpha, \beta) \in [1, n]^2$ puis que $g(\alpha) = \beta$ et $g(\beta) = \alpha$.

   (f) Montrer que la fonction $x \longmapsto x - \ln(x)$ est bijective et en déduire que $\alpha = \beta$.

   (g) En déduire que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_k = x_n$.

   (h) Écrire une fonction Python `suite(n)` qui renvoie une valeur approchée de x_n.

✪ A NE FAIRE QUE SI TOUT LE RESTE A ETE FAIT ✪

[*]<u>EXERCICE 4</u> : Suites de Cantor

La partie entière d'un réel x sera notée $\lfloor x \rfloor$. $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, ie les nombres de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE I : Irrationalité de e

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

On admettra que la suite que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre de Néper : $\mathrm{e} = \exp(1)$.

1. Soit $n \geq 1$ un entier (fixé pour cette question).
   (a) Montrer que, pour tout $k \geq n+1$, on a : $2^{k-n-1}(n+1)! \leq k!$.
   (b) En déduire que si N est un entier naturel tel que $N \geq n+1$:
   $$x_n \leq x_N \leq x_n + \frac{2}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{2^{N-n}}\right)$$
   puis montrer que $x_n \leq \mathrm{e} \leq x_n + \dfrac{2}{(n+1)!}$.
   (c) En déduire qu'il existe un entier naturel ϵ_n tel que $\epsilon_n \leq n!\mathrm{e} \leq \epsilon_n + \dfrac{2}{n+1}$
2. (a) Montrer que, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de nombres réels, alors :
   $$\alpha_n - \beta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos(\alpha_n) - \cos(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   (b) En déduire que $\cos(n!2\pi\mathrm{e}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   (c) Étudier, en fonction de n, la parité de l'entier ϵ_n.
   (d) En conclure que la suite $\big(\cos(n!\pi\mathrm{e})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
3. (a) Soit x un nombre réel tel que $\dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\cos(n!x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   (b) On suppose que $\dfrac{\mathrm{e}}{2} \in \mathbb{Q}$.Trouver une contradiction avec la question précédente. En déduire que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

PARTIE II : Suites $\big(\cos(n!x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$

On cherche ici à montrer que, pour tout $\ell \in [-1,1]$, il existe un réel x tel que $\cos(n!x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geq 2,\ a_n \in [\![0, n-1]\!]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$.

1. Soient deux entiers n et p tels que $n > p \geq 1$.
   (a) Montrer que : $0 \leq s_n - s_p \leq \dfrac{1}{p!} - \dfrac{1}{n!}$.
   (b) En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   Sa limite, qui dépend bien sûr de la suite de Cantor $(a_k)_{k\geq 1}$, sera notée L_a.
   (c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $s_p \leq L_a \leq s_p + \dfrac{1}{p!}$.

2. On fixe $\ell \in [-1,1]$ puis on pose $\theta = \arccos(\ell)$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = \left\lfloor n\dfrac{\theta}{2\pi} \right\rfloor$.

   (a) Vérifier que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses préliminaires de la Partie II.

   (b) Étudier la convergence de la suite $\left(2\pi\dfrac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et préciser sa limite.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier ϵ_n tel que :

$$\epsilon_n + \frac{a_n}{n+1} \leq n!L_a \leq \epsilon_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

   (d) On pose $x = 2\pi L_a$. Conclure que $\cos(n!x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.