PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 6 **Année scolaire 2018-2019**
Samedi 19 janvier 2019

Durée du devoir : 2h00

Les calculatrices lycée sont autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Développements limités

1. Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de $\dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\ln(1+x^2)}$.
2. Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$.

EXERCICE 2 : Développement asymptotique d'une suite implicite

1. **Résultat préliminaire.** Soient (x_n) et (y_n) deux suites de réels strictements positifs. On suppose que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$ et que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in [0,1[\cup]1,+\infty]$.

   Montrez que : $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(y_n)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation :
$$x + \mathrm{e}^x = n \qquad (E_n)$$
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution réelle x_n.
   (b) Montrer que (x_n) est croissante.
   (c) En déduire la limite de (x_n) et justifier que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\mathrm{e}^{x_n}\big)$.
   (d) Justifier que $\mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et en déduire un équivalent de x_n.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - \ln(n)$.
      i. En utilisant (E_n), montrer que $\mathrm{e}^{y_n} = 1 - \dfrac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.
      ii. Déterminer la limite de (y_n).
      En déduire un équivalent de $e^{y_n} - 1$ en fonction de y_n.
      iii. À l'aide des questions précédentes, montrer que :
$$x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

<u>EXERCICE 3</u> : Pseudo-inverse d'une matrice

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note ${}^tA$ sa transposée.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *pseudo-inversible* si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad AB = BA \\ &\text{(ii)} \quad ABA = A \\ &\text{(iii)} \quad BAB = B \end{aligned}$$

On dit alors que B est *une pseudo-inverse* de A.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice pseudo-inversible, et B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.
   (a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_1 = AB_2$.
   (b) En déduire que $B_1 = B_2$.

Ainsi, une matrice pseudo-inversible A admet *une unique pseudo-inverse*, que l'on note $A^\star$.

2. **Exemples.**
   (a) Montrer que la matrice nulle 0_n est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.
   (b) Montrer toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse. La réciproque est-elle vraie ?
   (c) Montrer toute matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice pseudo-inversible.
   (a) La matrice $A^\star$ est-elle pseudo-inversible ? Si oui, préciser sa pseudo-inverse.
   (b) La matrice ${}^tA$ est-elle pseudo-inversible ? Si oui, préciser sa pseudo-inverse.
   (c) Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = P^{-1}AP$. Montrer que B est pseudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse en fonction de P et $A^\star$.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$: $A^\star \times A^k = A^{k-1}$.
4. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $N^p = 0_n$. On note p_0 le plus petit entier naturel non nul vérifiant cette propriété.
   (a) Montrer que $N^{p_0} = 0_n$ et $N^{p_0-1} \neq 0_n$.
   (b) Montrer que si N est pseudo-inversible alors $N = 0_n$.
   (c) Que peut-on en déduire concernant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?
5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) En observant les colonnes des matrices A, $A - 2I_3$ et $A - 4I_3$, expliciter, pour $\lambda \in \{0, 2, 4\}$, une solution non nulle du système linéaire (S_λ) : $(A - \lambda I_3)X = 0_{3,1}$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{0, 2, 4\}$.
   (c) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. Expliciter son inverse, en expliquant la démarche. Calculer ensuite $P^{-1}AP$.
   (d) Montrer que A est pseudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse.