PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 7 **Année scolaire 2018-2019**
Samedi 16 mars 2019

Durée du devoir : 4h00

Les calculatrices lycée sont autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

<u>EXERCICE 1</u> : Questions de cours sur les espaces vectoriels

Dans tout l'exercice $\mathbb{E}$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
2. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$ ($p \in \mathbb{N}^*$).
   (a) Donner la définition de $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Quelles sont ses propriétés en tant que partie de $\mathbb{E}$? (on ne demande pas de les démontrer)
   (b) Donner la définition de la propriété « la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de $\mathbb{E}$ ». On donnera cette définition en langue française puis à l'aide de quantificateurs.
   (c) Donner la définition de la propriété « la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre ». On donnera cette définition en langue française puis à l'aide de quantificateurs.
3. Dans cette question $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$. On pose $\mathbb{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \, x + 2y = z\right\}$. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ de deux façons :
   (a) en utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels ;
   (b) en exhibant une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ telle que $\mathbb{F} = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
4. Dans cette question $\mathbb{E} = \mathbb{K}_3[X]$.
   Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X - a, (X - a)^2, (X - a)^3)$ est génératrice de $\mathbb{K}_3[X]$.

EXERCICE 2 : Dans l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

On note $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

On note dans la suite de l'exercice $\mathbb{E} = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. $\mathbb{E}$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-t/2}\sin(t\sqrt{3}/2)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-t/2}\cos(t\sqrt{3}/2)$.

Nous allons montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

2. (a) L'étudiante Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations à trois inconnues a, b et c, qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !
   (b) L'étudiante Lucie propose d'exploiter l'unicité de la partie régulière dans le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0. Faites comme elle !
   (c) L'étudiante Nicole décide de supposer par l'absurde que $a \neq 0$ et de trouver un équivalent de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Faites comme elle !
3. On pose $\mathbb{F} = \left\{af_1 + bf_2 + cf_3;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Donner en une base.

EXERCICE 3 : Étude d'une fonction

On se propose d'étudier la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Justifier que f est de classe C^1 sur $[0, 1[$.
4. Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(\mathrm{e})$.

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$.

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq \mathrm{e}$.
6. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
7. Montrer que $\forall x \geq \mathrm{e},\ 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.
8. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}$.
9. En déduire un programme Python qui calcule une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

On définit une fonction g par $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$.

10. On admet que, sur $D\backslash\{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2\ln(x)^2}h(x)$ avec $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.
    Étudier les variations de g.
11. Déterminer la limite de g en 1.
12. Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f.

On pose $H(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

13. Déterminer l'ensemble de définition J de H.
14. Étudier la limite de H en 0.
15. Justifier qu'il existe un réel a dans $]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in [a,1[, \quad \frac{3}{2}(x-1) \leq \ln(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

En déduire la limite de H à gauche en 1.

<u>EXERCICE 4</u> : Étude d'une solution d'une équation différentielle

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2y' = (2-x)y$. On note I l'intervalle $]-\infty,1[$.

1. Vérifier que $A : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - \ln(1-x)$ est une primitive sur I de la fonction $a : x \longmapsto \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.
2. Résoudre (E) sur I.

Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\mathrm{e}^{1/(1-x)}$.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur I et calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.
4. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 1, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \times \mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

pour tout réel x appartenant à I.
On vérifiera que $P_0 = X$ et $P_{n+1}(X) = X^2\big(P_n' + P_n\big)$ pour tout entier naturel n.

5. Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
6. En dérivant n fois les deux membres de l'identité $(1-x)^2 f'(x) = (2-x)f(x)$ valable pour $x < 1$, prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2]P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X)$$

Dans la suite on souhaite établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

7. Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
8. (a) Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2, a_3. En déduire a_4.
   (b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

On désigne par $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.

9. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_p(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}\right)$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f_p sur $[0,1]$, prouver que la suite (u_p) converge vers e.

Si p et n désignent des entiers naturels quelconques, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

10. (a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geq 1$.

    (b) Prouver que les suites $\big(S_p(0)\big)_p$ et $\big(S_p(1)\big)_p$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.

11. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

12. En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $\big(S_p(n)\big)_p$ converge.

13. Prouver que : $a_n = \lim\limits_{p\to+\infty} \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = n! \times \lim\limits_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} \frac{1}{i!}$