PCSI1 * - DEVOIR SURVEILLE N ° 8 **Année scolaire 2018-2019**
Samedi 4 mai 2019

Durée du devoir : 4h00

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Fonction définie par une intégrale

PARTIE 1. Préliminaires.

1. Rappeler l'allure de la courbe de la fonction arctan, et montrer que :

$$\forall u > 0, \qquad \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u)$$

2. Montrer que la fonction arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant 1 \times |x - y|$$

3. Montrer à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left|\arctan(b) - \arctan(a) - \frac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}$$

PARTIE 2. Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(xt)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

4. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et étudier la parité de f. Calculer $f(1)$.
5. Montrer que f est strictement croissante.
6. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|$.
   (b) En déduire que f est continue.
7. (a) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer que pour tout $x > 0$:
$$\left|\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\varepsilon$$
   et :
$$\left|\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\ln(\varepsilon)|}{x}$$
   (b) En déduire, en revenant à la définition, que : $\displaystyle\lim_{+\infty} f = \frac{\pi^2}{8}$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(x^2t^2+1)}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad |f(y) - f(x) - (y-x)g(x)| \leqslant \frac{(y-x)^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que f est dérivable en x, et $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(x^2t^2+1)}\,\mathrm{d}t$. Commentaire ?
   (c) On suppose que $x^2 \neq 1$. Exprimer $f'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. Pour cela on remarquera que :
$$\forall t \in [0,1], \qquad \frac{t}{(t^2+1)(x^2t^2+1)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2t}{x^2t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\right)$$
9. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

<u>EXERCICE 2</u> : Endomorphismes échangeurs

Définition : Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un endomorphisme u de $\mathbb{E}$ est dit *échangeur* lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ de $\mathbb{E}$ tels que : $$\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G} \qquad u(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{G} \qquad u(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{F}$$

PARTIE 1. Un exemple d'endomorphisme échangeur en dimension 3.

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, et on note $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\begin{cases} u(e_1) = e_3 \\ u(e_2) = -2e_1 - e_2 \\ u(e_3) = 2e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Expliciter en fonction de x_1, x_2 , x_3 les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_3$ des vecteurs $u(x)$ et $u^2(x)$.
2. Déterminer une base du noyau de u, puis montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
3. (a) Montrer que $u^3 = 3u$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel non nul p : $\begin{cases} u^{2p} = 3^{p-1}u^2 \\ u^{2p+1} = 3^p u \end{cases}$.

   (c) Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Ker}(u^q)$, lorsque $q \geqslant 1$?
4. Soit $\mathbb{F} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ -x_2 + x_3 = 0\}$. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et la dimension.
5. Soit $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}(e_3)$. Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et que $u(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{G}$ et $u(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{F}$.

Dans les deux parties suivantes, $\mathbb{E}$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme u de $\mathbb{E}$, et on suppose qu'il existe deux endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{E}$ tels que

$$\begin{cases} u = \varphi + \psi \\ \varphi^2 = \psi^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})} \end{cases}$$

On cherche à montrer que u est un endomorphisme échangeur de $\mathbb{E}$.

PARTIE 2. Cas où u est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

6. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$. Comparer $\mathrm{Ker}(f)$ à $\mathrm{Im}(f)$, et montrer que $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \geqslant \dfrac{1}{2}\dim(\mathbb{E})$.

On suppose que u est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

7. Montrer que $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\psi)$.
8. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\psi)$.
9. Montrer que u est un endomorphisme échangeur de $\mathbb{E}$.

PARTIE 3. Cas où u n'est pas un automorphisme de $\mathbb{E}$.

On suppose que u n'est pas un automorphisme de $\mathbb{E}$.
Pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{F}_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $\mathbb{G}_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

10. Montrer que la suite $(\mathbb{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et que la suite $(\mathbb{G}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
11. (a) On note p le plus petit élément de $A = \{k \in \mathbb{N};\ \mathbb{F}_k = \mathbb{F}_{k+1}\}$. Justifier que A est non vide et que $p \geqslant 1$.

    (b) Montrer que pour tout entier $k \geqslant p$, on a $\mathbb{F}_k = \mathbb{F}_p$ et $\mathbb{G}_k = \mathbb{G}_p$.
12. (a) Montrer que $\mathbb{F}_{2p}$ est stable par u, c'est-à-dire que $u(\mathbb{F}_{2p}) \subseteq \mathbb{F}_{2p}$.

    (b) On note alors $u_0 : \mathbb{F}_{2p} \longrightarrow \mathbb{F}_{2p}\,;\ x \longmapsto u(x)$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{F}_{2p}$ (c'est-à-dire que u_0 est la restriction de u à $\mathbb{F}_{2p}$ au départ et à l'arrivée). Montrer que u_0 est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{F}_{2p}$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $u_0^m = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{F}_{2p})}$.

13. (a) Montrer que $\mathbb{G}_{2p}$ est stable par u, et que l'endomorphisme induit $u_1 : \mathbb{G}_{2p} \longrightarrow \mathbb{G}_{2p}$; $x \longmapsto u(x)$ est un automorphisme.
    (b) Montrer que φ et ψ commutent avec u^2. En déduire que $\mathbb{G}_{2p}$ est stable par φ et ψ.

On pourra noter si besoin φ_1 et ψ_1 les endomorphismes de $\mathbb{G}_{2p}$ induits respectivement par φ et ψ.

14. Montrer que $\mathbb{E} = \mathbb{F}_{2p} \oplus \mathbb{G}_{2p}$.
15. On admet que tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur. Montrer que u est un endomorphisme échangeur.