Durée du devoir : 3h00

Les calculatrices sont autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

<u>EXERCICE 1</u> : Questions de cours

1. Qu'est-ce qu'une série géométrique et à quelle condition nécessaire et suffisante est-elle convergente ? Dans ce cas quelle est la valeur de sa somme ?
2. Qu'est-ce qu'une série de Riemann et à quelle condition nécessaire et suffisante est-elle convergente ?
3. Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel et $\varphi : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
   (a) À quelles conditions φ est-elle un produit scalaire ? On ne se contentera pas de nommer les conditions, on les écrira avec des quantificateurs.

   On suppose désormais que φ est un produit scalaire.

   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{E}$ ou $n = \dim(\mathbb{E})$ est un entier naturel non nul. À quelle condition $\mathcal{B}$ est-elle une base orthonormée de $\mathbb{E}$?

   (c) On suppose que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{E}, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x, e_k) e_k$$

4. (a) Donner la définition du prédicat « la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ ».

   (b) Dans ce cas donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$. Démontrer la formule pour $\mathbb{E}(X)$.

EXERCICE 2 : La constante d'Euler.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ montrer que :
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$$
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Vérifer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq S_n$$
3. En déduire un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.
4. Pour n entier naturel non nul, on pose $x_n = S_n - \ln(n)$. Montrer que la suite (x_n) est monotone convergente.

EXERCICE 3 : Projections et symétries orthogonales dans $\mathbb{R}^3$.

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B}_{cano} = (e_1, e_2, e_3)$ et de son produit scalaire canonique noté $\langle . , . \rangle$.

1. On note $\mathbb{F} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x + y + z = 0\big\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base orthonormée, puis montrer que $\mathbb{F}^\perp = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$. Donner alors une base orthonormée de $\mathbb{F}^\perp$.
   (b) On note p la projection orthogonal sur $\mathbb{F}$. On fixe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. À l'aide des bases orthonormées trouvées précédemment, donner l'expression du vecteur $p(x, y, z)$ en fonction des réels x, y et z.
   (c) Vérifier que $\underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(p) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On note $\mathbb{G} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x = z\big\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base orthonormée, puis montrer que $\mathbb{G}^\perp = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1)\big)$. Donner alors une base orthonormée de $\mathbb{G}$.
   (b) On note s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{G}$ et p la projection orthogonale sur $\mathbb{G}$. En s'inspirant de la question précédente, donner l'expression analytique de p et sa matrice dans la base $\mathcal{B}_{cano}$.
   Conclure que $\underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la dernière question de l'exercice, on se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_{cano} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et de son produit scalaire canonique noté $\langle . , . \rangle$.

3. On note $\mathbb{F} = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x + y + z + t = x - y + z - t = 0\big\}$. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base orthonormée de $\mathbb{F}^\perp$.
4. On note p la projection orthogonale sur $\mathbb{F}$. Donner sa matrice dans la base canonique.
5. On note s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{F}$. Donner sa matrice dans la base canonique.
6. On pose $u = (1, 2, 3, 4)$. Vérifier que $d(u, \mathbb{F}) = \sqrt{26}$.

EXERCICE 4 : Fonctions génératrices d'une VAR.

Soient n un entier naturel et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
Pour tout réel t, on pose :

$$G(t) = \mathbb{E}\big(t^X\big)$$

1. Justifier que pour tout réel t :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ déterminer l'expression de $G(t)$ pour tout réel t.
3. Si $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ déterminer l'expression de $G(t)$ pour tout réel t.

EXERCICE 5 : Calcul d'une somme de série.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone convergente. On note ℓ sa limite.
3. Montrer que la série $\sum \big(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})\big)$ est divergente.
4. En déduire que $\ell = 0$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.
   (a) Montrer que :
   $$\ln(v_n) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   (b) En déduire α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge.
6. On suppose que $\alpha = \dfrac{3}{2}$. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(v_n)$.
   (a) Montrer que la suite $\Big(\ln\big(n^{3/2}u_n\big)\Big)_n$ converge vers $S + \ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire alors que :
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2e^S}{5n^{3/2}}$$
   puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
   (b) En partant de $ku_k = (k+1)u_k - u_k$, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k = 2\sum_{k=2}^{n+2} ku_k + 3\sum_{k=2}^{n+2} u_k - 2\sum_{k=1}^{n+1} u_k$$
   (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   En utilisant la relation précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 3 - 3u_{n+1} - 2(n+1)u_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   (d) Écrire une fonction Python `somme(n)` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie en sortie le réel T_n.