PCSI - CONCOURS BLANC **Année scolaire 2018-2019**
Lundi 17 juin 2019

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices sont autorisées.

Les deux exercices sont indépendants.

SUJET D'ALGEBRE

Questions de cours :

1. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Démontrer que :
$$f \text{ est injective sur } \mathbb{E} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{E}}\}$$
2. Soient $\big(\mathbb{E}, \langle ., . \rangle\big)$ un espace euclidien et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{E}$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{E}$:
$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle .e_k$$

EXERCICE 1 : Sur les matrices nilpotentes

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$ s'appelle *l'indice de nilpotence* de M.

La *trace* d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le nombre complexe noté $\mathrm{Tr}(M)$ égal à la somme de ses coefficients diagonaux. Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pourra admettre sans démonstration que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

1. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée et $p \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que : M est nilpotente d'indice $p \iff \Big(M^p = 0_n \text{ et } M^{p-1} \neq 0_n \Big)$
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelles sont les matrices nilpotentes d'indice 1 ?
3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.
   (a) Quel est le rang de A ? Montrer que A est nilpotente et préciser son indice de nilpotence.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ et donner une base de $\mathrm{Im}(u)$ et de $\mathrm{Ker}(u)$.
   (c) On pose $\varepsilon_1 = (1,0,0)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. Donner un vecteur ε_3 tel que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ soit une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle u peut être réprésenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) Donner alors une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
4. **Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente.**
   On suppose que $n = 2$. Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $p \geq 2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de $\mathbb{C}^2$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   (b) Vérifier que la famille $\big(u^k(x_0)\big)_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$ et que $u^2 = 0$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
   (d) Construire une base de $\mathbb{C}^2$ dans laquelle la matrice de u est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (e) Montrer l'existence de $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible et telle que $M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
5. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.
6. Existe-t-il $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
7. **Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2.**
   On suppose que $n \geq 3$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice 2 et de rang r. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ et que $2r \leq n$.
   (b) Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de $\mathbb{C}^n$ tels que la famille $\big(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_r)\big)$ soit une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   (c) Montrer qu'il existe des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-2r}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que la famille $\big(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_r), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2r}\big)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   (d) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = \big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2r}\big)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et donner la matrice de u dans cette base.

<u>EXERCICE 2</u> : Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans tout l'exercice n est un entier naturel non nul.
Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ note $A_{i,j}$ le coefficient situé ligne $i \in [\![1,n]\!]$ et colonne $j \in [\![1,n]\!]$.
La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée A^T.

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace de A* le réel $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire. Quelle est la dimension de son noyau ?
2. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifier que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et que $\mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$.
3. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Tr}\left(A^T \times B\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{j,i}B_{j,i}\right)$.
4. Montrer que l'application $(A,B) \overset{\varphi}{\longmapsto} \mathrm{Tr}\left(A^T \times B\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On le notera $\langle .,. \rangle$ et on notera $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

5. On suppose dans cette question seulement que $n = 3$. Quelle est la norme de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? A est-elle orthogonale à $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?
6. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle orthonormée ?
7. On pose $\mathbb{H} = \ker(\mathrm{Tr})$. Déterminer une base de $\mathbb{H}^{\perp}$.