ANALYSE

Exercice 1 : question de cours

1. Enoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
2. Enoncer et démontrer le résultat portant sur les séries de Riemann.

Exercice 2 : probabilités

Soit n un entier naturel non nul. Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu. En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain (pouvant être négatif) du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance de la variable aléatoire G est positive.

1. Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que $p = \dfrac{2}{3}$.
   (a) Reconnaître la loi de X et montrer que $p(A) = \dfrac{13}{27}$.
   (b) Déterminer la loi de G et calculer son espérance. Le jeu est-il favorable au joueur ?
2. On revient maintenant au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
   Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
   Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
   Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.
   (a) Montrer que $E(Y) = 2p(A) - 1$.
   (b) En utilisant la loi de X montrer que $E(Y) = (1-2p)^n$.
   (c) En déduire alors l'équivalence $p(A) \geq \frac{1}{2}$ si et seulement si (n pair ou $p \leq \dfrac{1}{2}$).
3. Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $p(A) \geq \dfrac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $E(G) \leq 0$).
   (a) Expliquer la relation $G = 10(-1)^X X$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \leq n$, on a $k\dbinom{k}{n} = n\dbinom{k-1}{n-1}$.
   (c) En déduire que $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.
   (d) Démontrer alors que ($p(A) \geq \dfrac{1}{2}$ et $E(G) \leq 0$) si et seulement si $p \leq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 : les séries

Soit $x \geq 0$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{x+k+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{x+n} .$$

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n \dfrac{t^n}{1+t}$.

2. En déduire que
$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt = S_n(x) + R_n(x) \qquad \text{avec} \quad R_n(x) = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}\, dt.$$

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$.

4. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\, dt$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(0)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

6. On pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3k+1} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

   (a) Montrer que $U_n = 1 - \dfrac{1}{3} S_n(\dfrac{1}{3})$.

   (b) Vérifier que $\dfrac{3}{1+u^3} = \dfrac{1}{u+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2u-1}{u^2-u+1} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{u^2-u+1}$ pour tout $u \in [0,1]$.

   (c) En effectuant le changement de variable $u = t^{\frac{1}{3}}$, en déduire alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{3}}}{1+t}\, dt$.

   (d) Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.