Correction DM11

Exercice 1

1. $\sqrt{x+1}$ défini $\iff x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$

$\ln(x+1)$ défini $\iff x+1>0 \iff x>-1$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1,+\infty[}$

2. $x \longmapsto x+1$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ (polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$t \longmapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Donc par composition $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.

$x \longmapsto x+1$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

$t \longmapsto \ln t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par composition $x \longmapsto \ln(x+1)$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.

Par produit : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathcal{D}_f}$

On sait que $x+1 \xrightarrow[x \to -1]{} 0$

et $\sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ (croissances comparées)

Donc par composition : $f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} 0$

On prolonge f en posant $f(-1)=0$.

On a alors $\boxed{\mathcal{D}f=[-1,+\infty[}$ et d'après le théorème de prolongement par continuité, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathcal{D}f}$.

3. (a) $x \longmapsto x+1$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ (polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

$t \longmapsto \sqrt{t}$ et $t \longmapsto \ln t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition : $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ et $x \longmapsto \ln(x+1)$ sont dérivables sur $]-1,+\infty[$.

Par produit, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1,+\infty[.}$

3. (b)

Pour $x>-1$: $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \longrightarrow \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$

donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -1}$

3. (c) $\forall x>-1$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$f'(x) \xrightarrow[x \to -1]{} \frac{-\infty}{0^+} + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Comme f continue sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, +\infty[$ on peut utiliser le théorème de la limite de la dérivée et conclure que

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -1.}$$

4.

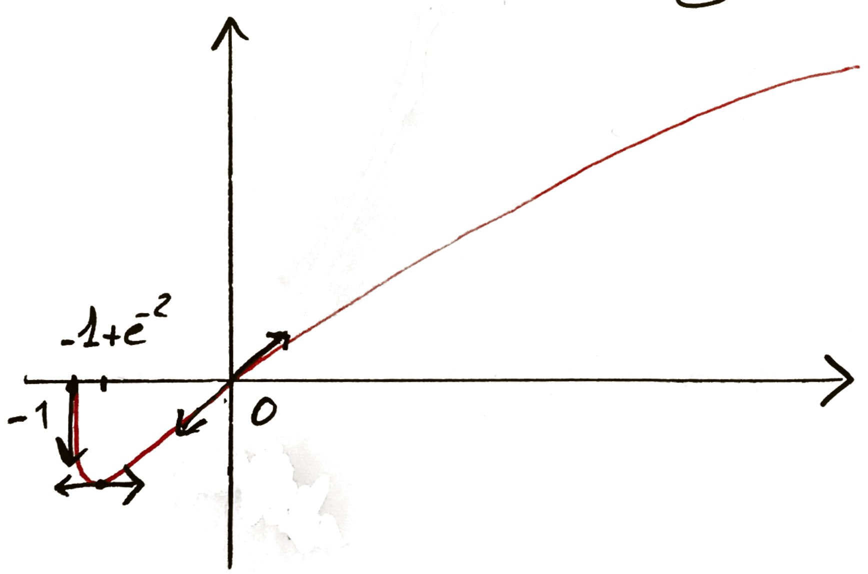
x	-1		$e^{-2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-2/e$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1) + 2}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) = -2$$
$$\iff x = e^{-2} - 1$$

$$f(e^{-2} - 1) = e^{-1} \times (-2) = -\frac{2}{e}$$



Tgte en O :
$y = x$

Exercice 2

1. On note $\alpha = e^{i2\pi/5}$.

D'après le cours les solutions de l'équation $z^5 = 1$ sont : $\boxed{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4.}$

2. On suppose $z \neq 1$ et $z^5 = 1$.

$$P(z - z^4) = (z - z^4)^4 + 5(z - z^4)^2 + 5$$

$$= z^4 - 4z^3 \times z^4 + 6z^2(z^4)^2 - 4z \times (z^4)^3 + (z^4)^4 + 5\left(z^2 - 2z \times z^4 + (z^4)^2\right) + 5$$

$$= z^4 - 4z^7 + 6z^{10} - 4z^{13} + z^{16} + 5z^2 - 10z^5 + 5z^8 + 5$$

$$\underset{z^5=1}{=} z^4 - 4z^2 + 6 - 4z^3 + z + 5z^2 - 10 + 5z^3 + 5$$

$$= z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \underset{z \neq 1}{=} \frac{1 - z^5}{1 - z} = 0 \text{ car } z^5 = 1$$

Donc $\boxed{z - z^4 \text{ est racine de } P.}$

3. Donc $\alpha - \alpha^4$, $\alpha^2 - (\alpha^2)^4$, $\alpha^3 - (\alpha^3)^4$ et $\alpha^4 - (\alpha^4)^4$ sont racines de P.

Donc $\alpha - \alpha^4$, $\alpha^2 - \alpha^8$, $\alpha^3 - \alpha^{12}$ et $\alpha^4 - \alpha^{16}$ sont racines de P.

Comme $\alpha^5 = 1$ on a donc :

$\alpha-\alpha^4$, $\alpha^2-\alpha^3$, $\alpha^3-\alpha^2$ et $\alpha^4-\alpha$ sont racines de P.

Vérifions qu'elles sont distinctes.

$$\alpha-\alpha^4 = \alpha(1-\alpha^3) = \alpha\left(1-e^{i\frac{6\pi}{5}}\right) = -2i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\alpha . e^{i\frac{3\pi}{5}}$$

$$= 2i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

donc $\alpha^4-\alpha = -2i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ car $\pi-\frac{3\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}$

$$\alpha^2-\alpha^3 = \alpha^2(1-\alpha) = \alpha^2\left(1-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\alpha^2 e^{i\frac{\pi}{5}}$$

$$= 2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

donc $\alpha^3-\alpha^2 = -2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ on a $0 < \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc les 4 racines trouvées sont 2 à 2 distinctes.

Comme $\deg(P) = 4$, P n'a pas d'autre racine.

Donc $\boxed{\text{les racines de P sont } \pm 2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ et } \pm 2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$.

4. $t^2+5t+5=0 \iff t = \frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

Ce sont deux réels négatifs.

Donc : $z^2 = -\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \iff z = \pm i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$

$z^2 = -\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \iff z = \pm i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$

Donc les 4 racines de P sont :

$$\boxed{\pm i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \text{ et } \pm i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

5. Comme $0 < \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ on a :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}} \text{ et } \boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$$

PROBLEME

Partie A

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = 0 \iff x^3 + (-2+3i)x^2 + (-3-5i)x + 6-2i = 0$$

$$\iff (x^3 - 2x^2 - 3x + 6) + i(3x^2 - 5x - 2) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0 \\ \text{et} \\ 3x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases}$$

Or $3x^2 - 5x - 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -\frac{1}{3}$

or $-\frac{1}{3}$ est racine de $P(X)$ mais pas 2.

Donc $\boxed{P(X) \text{ a une unique racine réelle : } 2}$

1. (b) $z^2 + 3iz - (3-i) = 0$

$\Delta = -9 + 4(3-i)$
$= 3 - 4i$

On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $(x+iy)^2 = 3-4i$

On a $(x+iy)^2 = 3-4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

On trouve $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$

Et y est de signe opposé à x. Donc on choisit $\delta = 2 - i$

Alors $z = \frac{-3i \pm (2-i)}{2} = \frac{2-4i}{2}$ ou $\frac{-2-2i}{2}$

ie $\boxed{z = 1-2i \text{ ou } -1-i}$

1.(c) On remarque que $P(X) = (X-2)(X^2+3iX-(3-i))$

Donc les racines de P sont : 2, $1-2i$ et $-1-i$

On a $|2| = 2$
$|1-2i| = \sqrt{5}$
$|-1-i| = \sqrt{2}$

Et $R = \max\left(2\sqrt{10}, 1+\sqrt{34}, 1+\sqrt{13}\right) = 1+\sqrt{34}$

On a bien $|2| \leq R$
$|1-2i| \leq R$
$|-1-i| \leq R$

donc $\boxed{\text{les 3 racines de } P \text{ appartiennent à } \overline{D}(0,R)}$

2.(a)
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{i,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{A \times E_k = k\text{-ième colonne de } A}$

2.(b).i. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, la k-ième colonne de A est E_{k+1} donc $\boxed{A \times E_k = E_{k+1}}$

$A \times E_n$ est la dernière colonne de A donc

$$\boxed{A \times E_n = \begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix}}$$

2.(b).ii $B = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$

donc $B \times E_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k E_1$.

Mais si $1 \leq k \leq n-1$: $A^k E_1 = E_k$

et $A^n E_1 = A E_n = \begin{pmatrix} -a_0 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Donc $BE_1 = a_0 E_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k E_k + AE_n$

$$= \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix} = O_{n,1}$$

ie $\boxed{BE_1 = O_{n,1}}$

2.(b).iii. Pour $k \in [\![2, n]\!]$ on a $E_k = A^k E_1$.

De plus, comme B est un polynôme en A : $BA^k = A^k B$

Donc $BE_k = BA^k E_1 = A^k BE_1 = A^k 0_{n,1} = 0_{n,1}$

Et on sait déjà que $BE_1 = 0_{n,1}$.

Donc $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ BE_k = 0_{n,1}}$

2.(b).iv Cela signifie que toutes les colonnes de B sont nulles et donc que $\boxed{B = 0_n}$.

2.(b).v $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i-6 \\ 1 & 0 & 3+5i \\ 0 & 1 & 2-3i \end{pmatrix}$

Il s'agit de vérifier que :

$$A^3 + (-2+3i)A^2 - (3+5i)A + (6-2i) = 0_3$$

Ce qui est bien vérifié.

2.(c).i. $\deg(P) = n$ et $\deg(X - \alpha) = 1$

donc $\boxed{\deg(R) = n-1}$

2.(c).ii. $R(A) \times E_1 = \alpha_{n-1} E_n + \cdots + \alpha_1 E_2 + \alpha_0 E_1$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$$

car les complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ sont non tous nuls

car $R \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ car $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

Donc $R(A)E_1 \neq 0_{n,1}$ et donc $\boxed{R(A) \neq 0_n}$

2.(c).iii. La matrice carrée $R(A)$ a donc au moins une colonne non nulle.

Si c'est la j-ième, $j \in [\![1, n]\!]$, alors $R(A) \times E_j \neq 0_{n,1}$.

Donc $\boxed{\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ R(A) \times X \neq 0_{n,1}}$

D'après la question 2.(a) on a $P(A) = 0_{n,1}$.

Comme $P = (X - \lambda) \times R(X)$

on a $P(A) = (A - \lambda I_n) \times R(A) = 0_{n,1}$

On multiplie par X à droite :

$$\boxed{(A - \lambda I_n) \times R(A) \times X = 0_{n,1}}$$

2.(c).iv On pose $V = R(A) \times X$.

D'après ce qui précède $\boxed{V \neq 0_{n,1}}$

et $(A - \lambda I_n) \times V = 0_{n,1}$ donc $\boxed{AV = \lambda V}$

3.(a).i. On fixe $i \in [\![1,n]\!]$.

On a $AV = \lambda V$.
A la i-ième ligne on a :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j = \lambda v_i$$

Donc $|\lambda v_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} v_j| = \sum_{k=1}^{n} |a_{i,j}|.|v_j|$

d'après l'inégalité triangulaire.

Mais $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|v_j| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |v_k|$

donc $|a_{i,j}| \times |v_j| \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |v_k|\right) \times |a_{i,j}|$

Par somme d'inégalités :

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \times |v_j| \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |v_k|\right) \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |a_{i,j}|}_{= M_i}$$

Par transitivité des $\leq$:

$$\boxed{|\lambda v_i| \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |v_k|\right) . M_i}$$

3.(a).ii Si on choisit $i \in [\![1,n]\!]$ tq $|v_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |v_k|$

on a $|\lambda| \times |v_i| \leq |v_i| \times M_i$

Par l'absurde si $|v_i| = 0$ on a

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|v_k| = 0$ ie $v_k = 0$

Donc $V = O_{n,1}$. Absurde.

Ainsi $|v_i| > 0$.

Donc $|\lambda| \times |v_i| \leq |v_i| \times r_i$ devient $|\lambda| \leq r_i$.

Donc $\lambda \in D_i$.

Par déf de l'union : $\boxed{\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i}$

3.(b) Soit λ une racine de $P(X)$.

Si A est la matrice compagnon associée à $P(X)$

alors d'après 2.(c) il existe $V \neq O_{n,1}$ tq $AV = \lambda V$.

Alors d'après 3.(a) on a :

$|\lambda| \leq |a_0|$ ou $|\lambda| \leq 1 + |a_1|$ ou ... ou $|\lambda| \leq 1 + |a_n|$

Donc $\boxed{|\lambda| \leq \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \ldots, 1 + |a_n|\}}$

Partie B

1.(a) h est dérivable sur $]0,+\infty[$ car quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x>0, \quad h'(x) = -\frac{H'(x)\times x^n - nx^{n-1}\times H(x)}{x^{2n}}$$

or $H'(x)\times x^n - nx^{n-1}\times H(x)$

$$= \left(nx^{n-1} - \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1}\right)x^n - \left(x^n - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right)nx^{n-1}$$

$$= \underbrace{c_0}_{\geqslant 0}\underbrace{nx^{n-1}}_{>0} + \sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{(n-k)}_{>0}\underbrace{c_k}_{\geqslant 0}\underbrace{x^{n+k-1}}_{>0}$$

Comme les réels $c_0, \dots, c_{n-1}$ sont non tous nuls :

$$H'(x)\times x^n - nx^{n-1}\times H(x) > 0$$

Donc $\forall x>0, \quad h'(x) < 0$

Donc $\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[.}$

1.(b) $h(x) = -1 + \dfrac{c_0}{x^n} + \dfrac{c_1}{x^{n-1}} + \dots + \dfrac{c_{n-1}}{x}$

or si $c>0$ et $k\in[\![1,n]\!]$: $\dfrac{c}{x^k} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

donc $h(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

et $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$

Comme h continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, elle est donc bijective de $]0,+\infty[$ vers $]-1,+\infty[$.

Comme $0 \in]-1,+\infty[$: $\exists ! \alpha > 0, \; h(\alpha) = 0$

Or $h(\alpha) = 0 \iff H(\alpha) = 0$.

Donc $\boxed{\text{H a une unique racine réelle } \alpha > 0.}$

Supposons par l'absurde que $H'(\alpha) = 0$.

On a alors $\alpha^n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \alpha^k \quad (1)$

et $n\alpha^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k c_k \alpha^{k-1}$

donc $n\alpha^n = \sum_{k=1}^{n-1} k c_k \alpha^k \quad (2)$

$n \times (1) - (2)$ donne :

$$0 = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(n-k)}_{>0} \underbrace{c_k}_{\geq 0} \underbrace{\alpha^k}_{>0} + \underbrace{n}_{>0} \underbrace{c_0}_{\geq 0}$$

Comme c'est une somme de termes positifs, il sont tous nuls. Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $c_k = 0$

c'est absurde d'après l'énoncé.

On a donc $H(\alpha)=0$ et $H'(\alpha)\neq 0$.

Donc $\boxed{\alpha \text{ est racine simple de } \kappa}$.

1.(c) On suppose $|\xi|>\alpha$.

Comme h strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et comme $|\xi|>\alpha>0$:

$$h(|\xi|)<h(\alpha)=0$$

ie $$-\frac{H(|\xi|)}{\xi^n}<0$$

donc $H(|\xi|)>0$

donc $$\boxed{|\xi|^n>\sum_{k=0}^{n-1}c_k|\xi|^k}$$

1.(d) Comme $H(\xi)=0$

on a $\xi^n=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\xi^k$. Donc d'après l'inégalité triangulaire : $$|\xi|^n\leq\sum_{k=0}^{n-1}c_k|\xi|^k$$

Ceci contredit le résultat de la question 1.(b)

où on a supposé $|\xi| > \alpha$.

On peut donc conclure que $|\xi| \leq \alpha$.

$\boxed{\text{Donc toutes les racines de } H(X) \text{ sont dans le disque de centre } O \text{ et de rayon } \alpha.}$

2.(a) $F_\gamma(X) = (X-\gamma) \times F(X)$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-1} \gamma a_k X^k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{k-1} X^k - \sum_{k=0}^{m-1} \gamma a_k X^k$$

$$= a_{m-1} X^m + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k-1} - \gamma a_k) X^k - \gamma a_0$$

Si on pose $H(X) = \frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(X)$:

$$H(X) = X^m - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\gamma a_k - a_{k-1}}{a_{m-1}} X^k - \frac{\gamma a_0}{a_{m-1}}$$

Pour $k \in [\![1, m-1]\!]$: $\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq \gamma$ et $a_{m-1} > 0$

donc $\frac{\gamma a_k - a_{k-1}}{a_{m-1}} \geq 0$

On a aussi $a_0 > 0$ et $\gamma > 0$ donc $\frac{\gamma a_0}{a_{m-1}} > 0$

Donc le polynôme $H(X)$ vérifie les hypothèses de la question B.1.
Il admet donc une unique racine réelle strictement positive qui ne peut être que γ (car $\gamma > 0$ et $H(\gamma) = 0$).
D'après B.1.(d), comme ξ est racine de $H(X)$, on a : $\boxed{|\xi| \leq \gamma}$

2.(b) On pose $G(X) = X^{m-1} \times F\left(\frac{1}{X}\right)$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^{m-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1-k} X^k$$

$G(X)$ est bien un élément de $\mathbb{C}[X]$.

De plus $\max_{k \in [\![1,m-1]\!]} \frac{a_{m-k}}{a_{m-1-k}} = \frac{1}{\min_{k \in [\![1,m-1]\!]} \frac{a_{m-1-k}}{a_{m-k}}} = \frac{1}{\gamma'}$

Enfin si $F(\xi) = 0$ alors $G\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{F(\xi)}{\xi^{m-1}} = 0$

donc $\frac{1}{\xi}$ est racine de $G(X)$.
D'après les questions précédentes : $\left|\frac{1}{\xi}\right| \leq \frac{1}{\gamma'}$ donc $\boxed{\gamma' \leq |\xi|}$

3.(a) On a : $\exists k \in [\![0, n-1]\!]$; $a_k \neq 0$

donc $\dfrac{|a_k|}{|a_n|} > 0$

D'après B.1. l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} x^k = x^n$ a unique solution strictement positive.

Mais : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} x^k = x^n \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$

$$\boxed{\text{Donc l'équation } \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n \text{ a unique solution réelle strictement positive.}}$$

3.(b) On pose $H(X) = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} X^k$

et $\forall x > 0$, $h(x) = -\dfrac{H(x)}{x^n}$

Les hypothèses de B.1. sont vérifiées donc h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et elle s'annule en ~~un~~ unique point qui est $\rho(F)$.

Soit ξ une racine complexe non nulle de $F(X)$.

On a $a_n \xi^n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi^k$

donc $|a_n| \times |\xi|^n = \left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |\xi|^k$

Comme $|\xi| > 0$ cette inégalité s'écrit :

$$h(|\xi_0|) \geqslant 0 = h(\rho(F)).$$

Comme h est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$:

$$|\xi_0| \leqslant \rho(F).$$

Cette inégalité est triviale si $\xi_0 = 0$

Donc pour toute racine complexe ξ_0 de $F(X)$ on a :

$$\boxed{|\xi_0| \leqslant \rho(F)}$$

3.(c).i. Nous avons d'après le th de d'Alembert_Gauss :

$$F(X) = a_n \times \prod_{k=1}^{n} (X - \xi_k)$$

$$= a_n \times \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \times \left[\sum_{0 < i_1 < \dots < i_{n-k} \leqslant n} \xi_{i_1} \times \dots \times \xi_{i_{n-k}} \right] \times X^k$$

En comparant les coefficients à gauche et à droite on obtient :

$$\frac{a_k}{a_n} = (-1)^{n-k} \times \sum_{i_1 < \dots < i_{n-k}} \xi_{i_1} \times \dots \times \xi_{i_{n-k}}$$

Le nombre de termes dans la somme de droite est $\binom{n}{k}$ et le module de chaque terme est majoré par $|\xi_n|^{n-k}$.

Le module de cette somme est donc majoré par $\binom{n}{k} \times |\xi_n|^{n-k}$ et donc :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leq \binom{n}{k} \times |\xi_n|^{n-k}}$$

3.(c).ii. Par définition de $\rho(F)$:

$$\rho(F)^n = \frac{1}{|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \times \rho(F)^k$$

Donc $\boxed{\rho(F)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(F)^k \times |\xi_n|^{n-k}}$

3.(c).iii D'après la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(F)^k \times |\xi_n|^{n-k} = \left(\rho(F) + |\xi_n|\right)^n - \rho(F)^n$$

Donc $2\rho(F)^n \leq \left(\rho(F) + |\xi_n|\right)^n$

Par croissance de la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$:

$$\sqrt[n]{2} \times \rho(F) \leq \rho(F) + |\xi_n|$$

Donc $\boxed{(\sqrt[n]{2} - 1)\rho(F) \leq |\xi_n|}$

<u>3.(c).iv</u> On remarque que $G(X) = X^n \times F\left(\frac{1}{X}\right)$

Les racines du polynôme $G(X)$ sont donc exactement les nombres complexes $\frac{1}{\xi_1}, \dots, \frac{1}{\xi_n}$ et elles vérifient :

$$\frac{1}{|\xi_n|} \leqslant \dots \leqslant \frac{1}{|\xi_1|}$$

D'après les questions précédentes :

$$(\sqrt[n]{2} - 1) \times \rho(G) \leqslant \frac{1}{|\xi_1|} \leqslant \rho(G)$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{1}{\rho(G)} \leqslant |\xi_1| \leqslant (\sqrt[n]{2} - 1) \times \rho(G)}$$

<u>3.(d)</u> Pour le polynôme $P(X) = X^3 + (-2+3i)X^2 + (-3-5i)X + 6 - 2i$

la borne de Cauchy est l'unique racine réelle > 0

de $x^3 = \sqrt{13}\,x^2 + \sqrt{34}\,x + 2\sqrt{10}$

La calculatrice donne $\rho(P) \simeq 5{,}02$.

Les racines de $P(X)$ sont $-1-i$, $1-2i$ et 2. Les valeurs approchées de leur module sont : $1{,}41$ $2{,}24$ et 2.

On a donc confirmé l'inégalité du 3.(b).

D'autre part :

$$(\sqrt[3]{2}-1)\times\rho(F) \simeq 1{,}30$$

ce qui confirme le résultat de 3.(c).iii.

<u>4.(a)</u> Par définition de $\rho(F_1)$:

$$|a_n|\times\rho(F_1) = \sum_{k=0}^{n-2}|a_k|\times\rho(F_1)^k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\times\rho(F_1)^k$$

Avec les notations de la question 3.(b) on a donc :

$$h(\rho(F_1)) \quad 0$$

et donc $\boxed{\rho(F_1) \leqslant \rho(F)}$

<u>4.(b)</u> Comme ξ est une racine non nulle de $F(X)$:

$$a_{n-1}\xi^{n-1} + a_n\xi^n = -\sum_{k=0}^{n-2}a_k\xi^k$$

puis $$a_{n-1} + a_n\xi = -\sum_{k=0}^{n-2}a_k\xi^{k-n+1}$$

Donc $$|a_{n-1}+a_n\xi| = \frac{1}{|\xi|^{n-1}}\times\left|\sum_{k=0}^{n-2}a_k\xi^k\right| \leqslant \frac{1}{|\xi|^{n-1}}\times\sum_{k=0}^{n-2}|a_k|\times|\xi|^k$$

Mais $|\xi| \geq \rho(F_1)$ et si $k \in [\![0, n-2]\!]$

alors $k-n+1 < 0$ donc :

$$|\xi|^{k-n+1} \leq \rho(F_1)^{k-n+1}$$

ie : $$\frac{|\xi|^k}{|\xi|^{n-1}} \leq \frac{\rho(F_1)^k}{\rho(F_1)^{n-1}}$$

On a donc $$\boxed{|a_{n-1} + a_n \xi| \leq \frac{1}{\rho(F_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \times |\rho(F_1)|^k = |a_n| \times \rho(F_1)}$$

4.(c) On a donc lorsque ξ n'appartient pas à D_0 :

$$|a_{n-1} + a_n \xi| \leq |a_n| \times \rho(F_1)$$

et donc $\left|\frac{a_{n-1}}{a_n} + \xi\right| \leq \rho(F_1)$ ie $\xi \in D_1$

$$\boxed{\text{Donc toute racine } \xi \text{ de } F(X) \text{ appartient à } D_0 \text{ ou à } D_1.}$$