EXERCICE 1

1. On pose $t = \frac{\pi}{2} - x = \varphi(x)$.

La fonction φ est C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc le changement de variable est licite.

$dt = -dx$

Donc $W_n = \int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-dx) = \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$

Mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Donc $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ et donc $\boxed{W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt}$

2. La fonction sin est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc par stricte positivité de l'intégrale : $\boxed{W_n > 0}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé qcq.

$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \times (\sin(t) - 1) \, dt$

et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq 0$ donc $\sin^n t \times (\sin t - 1) \leq 0$

et donc par positivité de l'intégrale : $W_{n+1} - W_n \leq 0$

Donc $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Comme elle est minorée par 0, on sait d'après le théorème de la limite monotone qu'elle est convergente vers $l \geq 0$.

4.(a) $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = \boxed{1}$

4.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé qcq.

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2(t)}_{=1-\cos^2(t)} \times \sin^n(t)\,dt$$

$$\text{donc } W_{n+2} = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt}_{=W_n} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(t)}_{u(t)} \times \underbrace{\left(\cos(t) \times \sin^n(t)\right)}_{v'(t)} dt$$

On a $u'(t) = -\sin(t)$ et $v(t) = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(t)$

Comme u et v sont C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a par IPP :

$$W_{n+2} = W_n - \left[\frac{1}{n+1}\cos(t) \times \sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{-1}{n+1}\sin^{n+2}(t)\,dt$$

$$\text{donc } W_{n+2} = W_n - 0 + 0 - \frac{1}{n+1} W_{n+2}$$

$$\text{donc } \boxed{W_{n+2} = W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2}}$$

$$\text{Et donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

4(c) On a $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2(n-1)}$

$$W_{2(n-1)} = \frac{2n-3}{2(n-1)} W_{2(n-2)}$$

$$W_{2(n-2)} = \frac{2n-5}{2(n-2)} W_{2(n-3)}$$

$$\vdots$$

$$W_2 = \frac{1}{2} W_0 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

donc $$W_{2n} = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\dots\times 3\times 1}{(2\times n)\times(2\times(n-1))\times\dots\times(2\times 2)\times(2\times 1)} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\dots\times 3\times 1}{2^n \times n!} \times \frac{\pi}{2}$$

Mais $(2n-1)\times(2n-3)\times\dots\times 3\times 1 = \frac{(2n)!}{2n\times(2n-2)\times\dots\times 2} = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\times(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$

De même $$W_{2n+1} = \frac{(2n)\times(2n-2)\times\dots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\dots\times 3} \times W_1$$

$$= \frac{2^n \times n!}{\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}} \times 1$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \frac{2^{2n}\times(n!)^2}{(2n+1)!}}$

Rem : on aurait pu aussi vérifier les formules par récurrence.

5.(a) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < W_{n+1} \leqslant W_n$

donc $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < W_{n+2} \leqslant W_{n+1}$

ie $0 < \dfrac{n+1}{n+2} W_n \leqslant W_{n+1}$ ie $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1}$

5.(b) Par encadrement on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$

et donc $\boxed{W_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} W_n}$

5.(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = n . W_n . W_{n-1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = (n+1) . W_{n+1} . W_n = \cancel{(n+1)} \times \dfrac{n}{\cancel{n+1}} W_{n-1} \times W_n = x_n$

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. Comme $x_1 = 1 \times 1 \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \times W_n \times W_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}}$

5.(d) D'après 5.(b) on a : $n . W_n \times W_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} n W_n^2$

donc $n . W_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ donc $W_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$

donc $\sqrt{W_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n \geqslant 0$ on a : $\boxed{W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0}$

6. D'après 4.(c) on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \binom{2n}{n} \times \frac{\pi}{2^{2n+1}}$

et d'après 5.(d) : $W_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times W_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times \binom{2n}{n} \times \frac{\pi}{2^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

donc $\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}}$

7.(a) On a $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} C.\sqrt{n}.\left(\frac{n}{e}\right)^n$

donc $(2n)! \underset{n \to +\infty}{\sim} C.\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$ et $(n!)^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} C^2.n.\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$

donc $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2}{n}} \times 2^{2n}$

7.(b) On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \binom{2n}{n} = \frac{1}{C}\sqrt{2}$

et d'après 6. : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

donc $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$

8. D'après 5.(b) on a $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc par suite extraite $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Or d'après 4.(c) on a :

$$W_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

$$W_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

donc $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{2}{\pi} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k) \times (2k)}{(2k-1)(2k+1)}$

donc $\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k) \times (2k)}{(2k-1) \times (2k+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$

ie " $\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots = \frac{\pi}{2}$ "

(John Wallis 1655)

EXERCICE 2

1. * f est définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

* Soit $(\lambda, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^2$.

On note $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

Alors $\lambda\vec{u} + \vec{v} = (\underbrace{\lambda x_1 + x_2}_{=X}, \underbrace{\lambda y_1 + y_2}_{=Y}, \underbrace{\lambda z_1 + z_2}_{=Z})$

Donc $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = (X+Y+Z, X+Y-2Z, 2X+2Y-Z)$

$= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2, \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 - 2\lambda z_1 - 2z_2,$

$2\lambda x_1 + 2x_2 + 2\lambda y_1 + 2y_2 - \lambda z_1 - z_2)$

$= \lambda(x_1 + y_1 + z_1, x_1 + y_1 - 2z_1, 2x_1 + 2y_1 - z_1)$

$+ (x_2 + y_2 + z_2, x_2 + y_2 - 2z_2, 2x_2 + 2y_2 - z_2)$

$= \lambda . f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

Donc f est linéaire.

* f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

2. * On a :

$$\mathrm{Ker}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ x+y+z=x+y-2z=2x+2y-z=0\}$$

Or : $\begin{cases}\boxed{x}+y+z=0\\ x+y-2z=0\\ 2x+2y-z=0\end{cases} \iff \begin{cases}\boxed{x}+y+z=0\\ -3z=0\\ -3z=0\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}\boxed{x}+y+z=0\\ \boxed{z}=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=-y\\ y \text{ qcq dans } \mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(\underbrace{(-1,1,0)}_{=\vec{u_1}})$

Comme $\vec{u_1}\neq\vec{0}_{\mathbb{R}^3}$ la famille $(\vec{u_1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

* Soit $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$f(\vec{e_1})=(1,1,2)$

$f(\vec{e_2})=(1,1,2)$

$f(\vec{e_3})=(1,-2,-1)$

Donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,1,2)}_{=\vec{v_1}}, \underbrace{(1,1,2)}_{=\vec{v_2}}, \underbrace{(1,-2,-1)}_{=\vec{v_3}}\big) \underset{\vec{v_1}=\vec{v_2}}{=} \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_3})$$

Les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ sont non colinéaires donc la famille $(\vec{v_1}, \vec{v_3})$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. * $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ donc f n'est pas injectif.

Donc f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

* $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ puisque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Donc f n'est pas surjectif.

4. * Si f est un projecteur alors $f \circ f = f$.

Or $f \circ f(\vec{e_1}) = f(f(\vec{e_1})) = f(1,1,2) = (4,-2,2) \neq f(\vec{e_1})$

Donc $f \circ f \neq f$ et donc f n'est pas un projecteur.

* Si f est une symétrie alors $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$

On $f\circ f(\vec{e_1}) \neq \vec{e_1}$.

Donc $f\circ f \neq id_{\mathbb{R}^3}$ donc f <u>n'est pas une symétrie</u>.

<u>5.</u> Soit $\vec{w} \in Ker(f) \cap Im(f)$.

Comme $\vec{w} \in Im(f)$:

$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 ;\ \vec{w} = a.\vec{v_1} + b.\vec{v_2}$
$= (a+b\ ,\ a-2b\ ,\ 2a-b)$

Et $\vec{w} \in Ker(f)$ donc : $\begin{cases} a+b+a-2b+2a-b=0 \\ a+b+a-2b-4a+2b=0 \\ 2a+2b+2a-4b-2a+b=0 \end{cases}$

ie $\begin{cases} 4a-2b=0 \\ -2a+b=0 \\ 2a-b=0 \end{cases}$ ie $b=2a$

Donc $\vec{w} = (3a, -3a, 0)$

Donc $Im(f) \cap Ker(f) \subseteq Vect((3,-3,0))$

Et $(3,-3,0) = \vec{v_1} + 2\vec{v_2} \in Im(f)$

$f(3,-3,0) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$ donc $(3,-3,0) \in Ker(f)$

Ainsi $Ker(f) \cap Im(f) = Vect((3,-3,0))$

Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

Donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 3

1.(a) Δ va de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$:

$$\Delta(\alpha . P_1 + P_2) = \alpha P_1(X+1) + P_2(X+1) - \alpha P_1(X) - P_2(X)$$
$$= \alpha . \left(P_1(X+1) - P_1(X)\right) + P_2(X+1) - P_2(X)$$
$$= \alpha . \Delta(P_1) + \Delta(P_2)$$

Donc $\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])}$

1.(b) • Si $P \in \mathbb{K}_0[X]$ alors $\underline{\Delta(P) = 0}$

• Si $\deg P \geq 1$.

Alors $P = \lambda X^d + \alpha X^{d-1} + \underbrace{\text{termes de degré} \leq d-2}_{=0 \text{ si } d=1}$

où $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ et } d \in \mathbb{N}^*. \\ \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$

donc d'après la formule du binôme :

$$P(X+1) = \lambda . X^d + d\lambda X^{d-1} + \alpha X^{d-1} + \text{termes de degré} \leq d-2$$

donc $\Delta(P) = d\lambda X^{d-1} + \text{termes de degré} \leq d-2$

Comme $\lambda \neq 0$ et $d \neq 0$ on a $\deg \Delta(P) = d - 1$

Donc $\underline{\deg \Delta(P) = \deg(P) - 1}$

2.(a) D'après 1.(b), si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $\Delta(P) \in \mathbb{K}_n[X]$.

Donc Δ_n va de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus Δ_n est linéaire (car Δ l'est).

Donc $\boxed{\Delta_n \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}$

2.(b) si $P \in \mathrm{Ker}\, \Delta_n$ alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$

D'après 1.(b) : P est constant

(car si P est non constant alors $\deg \Delta(P) > 0$)

donc $\mathrm{Ker}\, \Delta_n \subset \mathbb{K}_0[X]$ et l'inclusion réciproque

est immédiate.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{K}_0[X]}$.

2.(c) D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}\, \Delta_n) + \mathrm{rg}(\Delta_n)$$

donc $\mathrm{rg}(\Delta_n) = n+1-1 = n$

Mais d'après 1.(b) : $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Or $\dim(\mathrm{Im}\, \Delta_n) = n = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$

On sait donc que : $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]}$

3. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.

- si $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\Delta(0_{\mathbb{K}[X]}) = Q$
- si $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\deg(Q) \in \mathbb{N}$.

  on pose $n = 1 + \deg(Q)$.

  Alors $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}(\Delta_n)$

  donc $\exists P \in \mathbb{K}_n[X] ;\ \Delta(P) = Q$.

Dans les 2 cas : $\exists P \in \mathbb{K}[X] ;\ \Delta(P) = Q$.

Ceci prouve que Δ est surjective de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathbb{K}[X]$