EXERCICE 1

* Si f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ alors $f''-3f'+2f$ l'est aussi d'après les th généraux.

Donc φ est définie sur $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et à valeurs dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(f,g)\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$.

On a
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+g)&=(\lambda f+g)''-3(\lambda f+g)'+2(\lambda f+g)\\&=\lambda.f''+g''-3\lambda f'-3g'+2\lambda f+2g\\&=\lambda.(f''-3f'+2f)+g''-3g'+2g\\&=\lambda.\varphi(f)+\varphi(g)\end{aligned}$$

Donc φ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

* Soit $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a :

$f\in \mathrm{Ker}(\varphi)\iff f''-3f'+2f=0$

C'est une EDL d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique
$$z^2-3z+2=0 \iff z=1 \text{ ou } 2$$

Donc $f\in\mathrm{Ker}(\varphi)\Rightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda e^{x}+\mu e^{2x}$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi)\subseteq \mathrm{Vect}(x\mapsto e^x,\ x\mapsto e^{2x})$

Et l'inclusion réciproque est vraie car $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto e^{2x}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$

Comme les fonctions $x \longmapsto e^{x}$ et $x \longmapsto e^{2x}$ sont non colinéaires, elles forment une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

EXERCICE 2

1. C'est le théorème de transfert.

2. Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$ la fonction $u \mapsto e^{iuk}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Donc φ_X est C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont.

De plus :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi_X(u+2\pi) = \sum_{k=0}^{N} e^{i(u+2\pi)k} \times \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} e^{iuk} \times \underbrace{e^{i2\pi k}}_{\substack{=1 \\ \text{car } k \in \mathbb{Z}}} \times \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} e^{iuk} \times \mathbb{P}(X=k) = \varphi_X(u)$$

Donc φ_X est 2π-périodique.

$$\varphi_X(0) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X=k) = \boxed{1}$$

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi_X'(u) = \sum_{k=0}^{N} ik e^{iku} \times \mathbb{P}(X=k)$$

donc $\varphi_X'(0) = i \sum_{k=0}^{N} k \times \mathbb{P}(X=k) = \boxed{i\mathbb{E}(X)}$

$\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X''(u) = \sum_{k=0}^{N} i^2 k^2 e^{iku} \times \mathbb{P}(X=k)$

donc $\varphi_X''(0) = -\sum_{k=0}^{N} k^2 \times \mathbb{P}(X=k)$

D'après le théorème de transfert :

$$\varphi_X''(0) = \boxed{-\mathbb{E}(X^2)}$$

<u>3.</u> * Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ on a $X(\Omega) = \{0,1\}$ donc

$\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = e^{iu0} \times \mathbb{P}(X=0) + e^{iu1} \times \mathbb{P}(X=1)$

$$= \boxed{1-p+e^{iu}p}$$

* Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ on a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ donc

$\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{iu})^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \boxed{(1-p+pe^{iu})^n}$$

4. Soit $k \in [\![0,N]\!]$.

On a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\, e^{-iuk}\, du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{N} e^{iuj}\, \mathbb{P}(X=j)\right) e^{-iuk}\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{N} e^{iu(j-k)} \times \mathbb{P}(X=j)\right) du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}(X=j) \times \int_0^{2\pi} e^{iu(j-k)}\, du$$

Or si $l \in \mathbb{Z}^*$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{iul}\, du = \left[\frac{1}{il} e^{iul}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{il} e^{il2\pi} - \frac{1}{il} e^{0}$

$$= \frac{1}{il} - \frac{1}{il} = 0$$

Et si $l = 0$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{iul}\, du = \int_0^{2\pi} 1\, du = 2\pi$

Donc pour tout $j \in [\![0,N]\!]$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{iu(j-k)}\, du = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 2\pi & \text{si } j = k \end{cases}$

Finalement : $\boxed{\forall k \in [\![0,N]\!],\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\, e^{-iuk}\, du = \mathbb{P}(X=k)}$

Soit Y VAR tq $Y(\Omega) \subseteq [\![0,N]\!]$.

On suppose que $\varphi_X = \varphi_Y$.

On a donc $\forall u \in [0, 2\pi]$, $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$

donc $\forall k \in [\![0,N]\!]$, $\forall u \in [0, 2\pi]$, $\varphi_X(u) e^{-iuk} = \varphi_Y(u) e^{-iuk}$

donc $\forall k \in [\![0,N]\!]$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iuk} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_Y(u) e^{-iuk}$

donc $\forall k \in [\![0,N]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k)$

X et Y ont donc la même loi.