$\underline{1.}$ On a $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)$

Donc pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x+2y-z = 0 \\ -x-y+2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ -3y + 3z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \text{ qcq dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{u_1})$ où $\vec{u_1} = (1,1,1)$

Comme $\vec{u_1} \neq \vec{0}$ la famille $(\vec{u_1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

D'autres $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$

$$\text{où } \vec{v_1} = (2,-1,-1)$$
$$\vec{v_2} = (-1,2,-1)$$
$$\vec{v_3} = (-1,-1,2)$$

On a $\vec{v_1} + \vec{v_2} = (1,1,-2) = -\vec{v_3}$

donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$

Comme $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont non colinéaires, la famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+4-(1-2-2) = 6+3 = 9 \neq 0$

donc la famille $\mathcal{E} = (\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Donc $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ et $\mathcal{E}$ est une base adaptée à cette somme directe.

On a $f(\vec{u_1}) = \vec{0}$ car $\vec{u_1} \in \operatorname{Ker}(f)$.

$f(\vec{v_1}) = (6,-3,-3) = 3.(2,-1,-1) = 3\vec{v_1}$

$f(\vec{v_2}) = (-3,6,-3) = 3.(-1,2,-1) = 3\vec{v_2}$

donc $\operatorname{Mat}(f; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} D$

3. On pose $P \overset{\text{def}}{=} P_{\mathcal{B}_{cano} \to \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

On a $A = PDP^{-1}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A = PD^nP^{-1}$

or $D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2\times 3^n & -3^n \\ 0 & -3^n & 2\times 3^n \\ 0 & -3^n & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \cdot A \quad \text{si } n \geq 1$$

et $A^n = I_3$ si $n = 0$

<u>4.</u> On a donc

$$\forall (x,y,z), \quad f^n(x,y,z) = \begin{cases} (x,y,z) & \text{si } n = 0 \\ 3^{n-1} \cdot (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + z) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

<u>5.</u> Soit p la projection sur $\mathrm{Im} f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Alors $\mathrm{Mat}(p; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} D = \mathrm{Mat}\left(\frac{1}{3} f; \mathcal{E}\right)$

Donc $p = \frac{1}{3} f$ donc $f = 3p$.