Correction du DM4

Exercice 1

1.(a) $\sin(a)\times\sin(b) = \frac{1}{2}\times\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1-2\sin^2\left(\frac{a-b}{2}\right)-1+2\sin^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

$$= \boxed{\sin^2\left(\frac{a+b}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

On fixe $x \in]0,\pi[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note P_n le prédicat :

$$\text{"} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} \text{"}$$

- Pour $n=1$: $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \sin(x)$

  et $\frac{\sin^2(nx)}{\sin x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin(x)$

  donc P_1 est vrai.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vrai.

  but mq P_{n+1} est vrai.

On a $\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) + \sin((2n+1)x)$

$$\underset{P_n}{=} \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin((2n+1)x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx) + \sin((2n+1)x) \times \sin x}{\sin x}$$

Mais d'après l'indication :

$$\sin((2n+1)x) \times \sin x = \sin^2((n+1)x) - \sin^2(nx)$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}$

Donc P_{n+1} est vrai.

- Conclusion : $\boxed{P_n \text{ est vrai pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

1.(b) Par linéarité de la partie imaginaire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{ix} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i2x}\right)^k\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{ix} \times \frac{1-\left(e^{i2x}\right)^n}{1-e^{i2x}}\right)$$

$e^{i2x} \neq 1$ car $0 < 2x < 2\pi$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix} \times e^{inx}}{e^{ix}} \times \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{e^{-ix} - e^{ix}}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{inx} \times \frac{-2i \cdot \sin(nx)}{-2i \cdot \sin(x)}\right)$$

Et donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}}$

2. $\sin x + \sin(3x) + \sin(5x) + \sin(7x)$

$$= \sum_{k=0}^{3} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(4x)}{\sin x} \quad \text{pour } x \in]0,\pi[$$

Donc :

$$\sin x + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sin^2(4x)}{\sin x} - \sin(4x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sin^2(4x) = \sin(4x) \times \sin x$$

$$\Longleftrightarrow \sin(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(4x) = \sin x$$

$$\Longleftrightarrow 4x = 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad 4x = x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 4x = \pi - x\ [2\pi]$$

$$\Longleftrightarrow x = 0 \left[\frac{\pi}{4}\right] \quad \text{ou} \quad x = 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{5} \left[\frac{2\pi}{5}\right]$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{5} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{5} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4} \right\}}$$

Exercice 2

1. $$\sum_{k=0}^{n-1}(a+b\omega^k) = a.\sum_{k=0}^{n-1} 1 + b.\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$$

$$= a \times n + b \times \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \quad \text{car } \omega \neq 1 \; (n \geqslant 2)$$

$$= a \times n + b \times 0 \quad \text{car } \omega^n = 1$$

$$= \boxed{na}$$

2. D'après l'inégalité triangulaire :

$$|na| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a+b\omega^k|$$

Mais $|na| = |n| \times |a| = n \times |a|$ et $n > 0$ donc :

$$|a| \leqslant \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a+b\omega^k| \quad (*)$$

De même on prouve que :

$$|b| \leqslant \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} |b+a\omega^k|$$

Mais $\omega^n = 1$ donc $|b+a\omega^k| = |b\omega^n + a\omega^k|$

$$= |\omega^k| \times |a + b\omega^{n-k}|$$

$$= |\omega|^k \times |a + b\omega^{n-k}|$$

$$= |a + b\omega^{n-k}| \quad \text{car } |\omega| = 1$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |b+a\omega^k| = \sum_{k=0}^{n-1} |a+b\omega^{n-k}|$

$\displaystyle \underset{k'=n-1-k}{=} \sum_{k'=0}^{n-1} |a+b\omega^{k'+1}|$

$\displaystyle \underset{k=k'+1}{=} \sum_{k=1}^{n} |a+b\omega^k|$

mais $\omega^n = 1 = \omega^0$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |b+a\omega^k| = \sum_{k=0}^{n-1} |a+b\omega^k|$

On a donc :

$$|b| \leq \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a+b\omega^k| \qquad (**)$$

En additionnant les inégalités $(*)$ et $(**)$ on obtient :

$$\boxed{|a|+|b| \leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |a+b\omega^k|}$$