Correction DM 8

Exercice 1

1.(a) On utilise la méthode du système linéaire.

$$(S)\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 = y_1 \\ \boxed{2x_2} - x_3 = y_1 - y_2 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ x_2 - x_3 = y_1 - y_3 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 = y_1 \\ \boxed{2x_2} - x_3 = y_1 - y_2 \\ \boxed{x_3} = -y_1 - y_2 + 2y_3 & L_3 \leftarrow -2L_3 + L_2 \end{cases}$$

C'est un système de 3 équations à 3 inconnues de rang 3 donc il a une unique solution et donc <u>P est inversible</u>.

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = -y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}. \text{ Donc } \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

1.(b) On trouve $\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

1.(c) D'après le cours $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ D^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Or $D=PAP^{-1}$ donne $A=P^{-1}DP$

puis par récurrence immédiate : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=P^{-1}D^nP$

On en déduit que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n+3^n & (-1)^n-3^n & 3^n\\ -3^n & 3^n & -3^n\\ -(-1)^n-3^n & -(-1)^n+3^n & -3^n\end{pmatrix}}$

Pour T on a $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{=\Delta}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=N}$

Comme $\Delta N=N\Delta$ et $N^2=O_3$ la formule du binôme donne

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T^n=\Delta^n+\binom{n}{1}\Delta^{n-1}\times N$

donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{pmatrix}}$

On en déduit que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ B^n=P^{-1}T^nP=\begin{pmatrix}1+n2^{n-1} & 1-2^n & n2^{n-1}\\ -n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1}\\ -1+(2-n)2^{n-1} & 2^n-1 & (2-n)2^{n-1}\end{pmatrix}}$

2.(a) On a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$ donc par récurrence immédiate $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$

2.(b) On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \begin{pmatrix} (-1)^n.(x_0+y_0) + 3^n.(x_0-y_0+z_0) \\ 3^n.(y_0-x_0-z_0) \\ (-1)^{n+1}.(x_0+y_0) + 3^n.(y_0-x_0-z_0) \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} x_n = (-1)^n.(x_0+y_0) + 3^n.(x_0-y_0+z_0) \\ y_n = 3^n.(y_0-x_0-z_0) \\ z_n = (-1)^{n+1}.(x_0+y_0) + 3^n.(y_0-x_0-z_0) \end{cases}}$

2.(c) Si $x_0 - y_0 + z_0 > 0$ alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Si $x_0 - y_0 + z_0 < 0$ alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

Si $x_0 - y_0 + z_0 = 0$ et $x_0 + y_0 \neq 0$ alors la suite (x_n) n'a pas de limite.

Si $x_0 - y_0 + z_0 = 0$ et $x_0 + y_0 = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 0$

donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc $\boxed{(x_n) \text{ est convergente} \iff \begin{cases} x_0 - y_0 + z_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 0 \end{cases}}$

3.(a) On a $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} 2x(t) - 4y(t) + 3z(t) \\ -3x(t) + 3y(t) - 3z(t) \\ -2x(t) + 4y(t) - 3z(t) \end{pmatrix}$

donc $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = \begin{pmatrix} 2x'(t) - 4y'(t) + 3z'(t) \\ -3x'(t) + 3y'(t) - 3z'(t) \\ -2x'(t) + 4y'(t) - 3z'(t) \end{pmatrix}$

On voit que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P.X'(t)}$

3.(b) On a :

$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A.X(t) \iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P.A.X(t)$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = PAP^{-1}.Y(t)$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = D.Y(t)$

3.(c) On a $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = D \times Y(t)$

donc $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = -\alpha(t) \\ \beta'(t) = 3\beta(t) \\ \gamma'(t) = 0 \end{cases}$

Il existe donc des réels C_1, C_2 et C_3 tels que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \alpha(t) = C_1 e^{-t} \\ \beta(t) = C_2 e^{3t} \\ \gamma(t) = C_3 \end{cases}}$$

3.(d) On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - C_3 \\ - C_2 e^{3t} + C_3 \\ - C_1 e^{-t} - C_2 e^{3t} + 2C_3 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - C_3 \\ y(t) = - C_2 e^{3t} + C_3 \\ z(t) = - C_1 e^{-t} - C_2 e^{3t} + 2C_3 \end{cases}}$$

avec C_1, C_2, C_3 constantes réelles quelconques.

6

4. On trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = B^n . X_0 = \begin{pmatrix} (1+n2^{n-1})x_0 + (1-2^n)y_0 + n2^{n-1}z_0 \\ -n2^{n-1}x_0 + 2^n y_0 - n2^{n-1}z_0 \\ (-1+(2-n)2^{n-1})x_0 + (2^n-1)y_0 + (2-n)2^{n-1}z_0 \end{pmatrix}$$

donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} x_n = x_0 + y_0 + 2^{n-1}.(nx_0 - 2y_0 + nz_0) \\ y_n = 2^{n-1}.(-nx_0 + 2y_0 - nz_0) \\ z_n = 2^{n-1}.((2-n)x_0 + 2y_0 + (2-n)z_0) - x_0 - y_0 \end{cases}}$$

et : $\boxed{(x_n) \text{ converge} \iff y_0 = 0 \text{ et } x_0 + z_0 = 0}$

5. On trouve $\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha'(t) = \alpha(t) \\ \beta'(t) = 2\beta(t) + \gamma(t) \\ \gamma'(t) = 2\gamma(t) \end{cases}$

Il existe donc des réels C_1 et C_3 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha(t) = C_1 e^{t} \\ \gamma(t) = C_3 e^{2t} \end{cases}$$

On a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ \beta'(t) - 2\beta(t) = C_3 e^{2t}$

* Pour l'équation homogène $\forall t \in \mathbb{R},\ \beta'(t) - 2\beta(t) = 0$

on trouve $\forall t \in \mathbb{R},\ \beta(t) = C_2 e^{2t}$ où $C_2 \in \mathbb{R}$

* On cherche une solution particulière de $\beta' - 2\beta = C_3 e^{2t}$ (7)

par variation de la constante : $\forall t \in \mathbb{R}, \beta(t) = C_2(t).e^{2t}$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, C_2'(t).e^{2t} + 0 = C_3 e^{2t}$

donc $\forall t \in \mathbb{R}, C_2'(t) = C_3$

donc on choisit $\forall t \in \mathbb{R}, C_2(t) = C_3 t$

* On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \beta(t) = (C_2 + C_3 t)e^{2t}$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.

On a donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3.(t-1)e^{2t} \\ y(t) = -C_2 e^{2t} + C_3.(1-t)e^{2t} \\ z(t) = -C_1 e^{t} - C_2 e^{2t} + C_3.(2-t).e^{2t} \end{cases}}$

EXERCICE 2

$$\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n = e^{n.\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$$

On a $\sin\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\frac{1}{n}$

de plus $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $n.\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

et donc $n.\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Par composition de limites $e^{n.\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$

En conclusion $\boxed{\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e}$.

EXERCICE 3

1. Comme (u_n) est décroissante on sait d'après le théorème de la limite monotone qu'elle a une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Comme $u_n + u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ on a $u_n + u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Par l'absurde supposons que $l = -\infty$.

Alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ et donc $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

et donc par somme de limites $u_n + u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

C'est absurde.

Donc $l \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

donc $u_n + u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2l$.

Par unicité de la limite : $2l = 0$

et donc : $\boxed{l = 0}$

2. Comme (u_n) est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_{n-1}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} + u_n \leqslant 2u_n \leqslant u_n + u_{n-1}}$

On sait que $u_{n+1} + u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

donc $(u_{n+1} + u_n) \times n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

On en déduit que $(u_n + u_{n-1}) \times (n-1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc $(u_n + u_{n-1}) \times n = (u_n + u_{n-1}) \times (n-1) \times \dfrac{n}{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \times 1 = 1$

Comme $\forall n \geqslant 1, \ (u_{n+1} + u_n) n \leqslant 2n u_n \leqslant n(u_n + u_{n-1})$

on a d'après le théorème de convergence par encadrement :

$$2n u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et donc $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}}$