Correction du DS 1

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n) = $ " $u_n = (-2)^n + 3^n$ "

<u>Initialisation</u>. $(-2)^0 + 3^0 = 2 = u_0$ donc $P(0)$ est vrai.

$(-2)^1 + 3^1 = 1 = u_1$ donc $P(1)$ est vrai.

<u>Hérédité à 2 pas</u>. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vrais.

<u>but</u> $P(n+2)$ est vrai ie $u_{n+2} = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}$

On a $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$

D'après $P(n)$ on a $u_n = (-2)^n + 3^n$

et d'après $P(n+1)$ on a $u_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}$

Donc
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (-2)^{n+1} + 3^{n+1} + 6 \times \left((-2)^n + 3^n\right) \\ &= (1-3) \times (-2)^{n+1} + (1+2) \times 3^{n+1} \\ &= (-2)^{n+2} + 3^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vrai.

<u>Ccl</u> $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n + 3^n}$

Exercice 3

1. f est dérivable sur $]-\infty, 2]$ et $\forall x \leq 2$, $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

x	$-\infty$		2
f	$+\infty$	$\searrow$	-1

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ donc elle induit une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $[-1, +\infty[$.

Pour $x \leq 2$ et $y \geq -1$ on a :

$$y = f(x) \iff y = x^2 - 4x + 3 \iff x^2 - 4x + (3-y) = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(3-y) = 4(1+y) \geq 0 \text{ car } y \geq -1$$

Donc : $y = f(x) \iff x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4(1+y)}}{2} = 2 \pm \sqrt{1+y}$

$$\iff x = 2 - \sqrt{1+y} \quad \text{car } x \leq 2$$

Donc $\boxed{\forall y \geq -1,\ f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{1+y}}$

2. g est dérivable sur $]-2, +\infty[$
et $\forall x > -2$, $g'(x) = \dfrac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2} > 0$

x	-2		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	2

g est continue et strictement croissante sur $]-2,+\infty[$
donc elle induit une bijection de $]-2,+\infty[$ vers $]-\infty,2[$.

Pour $x>-2$ et $y<2$ on a :

$$y=g(x) \iff y=\frac{2x-1}{x+2} \iff xy+2y=2x-1$$

$$\iff x(y-2)=-(2y+1)$$

$$\iff x=\frac{2y+1}{2-y} \quad \text{car } y\neq 2$$

Donc $\boxed{\forall y<2,\ g^{-1}(y)=\dfrac{2y+1}{2-y}}$

3. * Mq si $z\in D$ alors $h(z)\in P$.

Soit $z\in D$. On le note $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$h(z)=\frac{z+i}{z-i}=\frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)}=\frac{(x+i(y+1))(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1+i\left(x(y+1)-x(y-1)\right)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2}$$

donc $\operatorname{Re}(h(z))=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}<0$ car $x^2+y^2<1$ car $z\in D$

donc $h(z)\in P$.

* Soit $Z \in P$ et $z \in D$.

$$h(z) = Z \iff \frac{z+i}{z-i} = Z$$

$$\iff z + i = Zz - iZ$$

$$\iff z(1-Z) = -i(Z+1)$$

$$\iff z = i.\frac{Z+1}{Z-1} \quad \text{car } Z \neq 1 \text{ car } Re(Z) < 0$$

et si on note $Z = X + iY$ avec $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left| i\,\frac{Z+1}{Z-1} \right|^2 = \frac{|Z+1|^2}{|Z-1|^2} = \frac{(X+1)^2+Y^2}{(X-1)^2+Y^2} = \frac{X^2+Y^2+2X+1}{X^2+Y^2-2X+1}$$

or $Z \in P$ donc $X < 0$

donc $0 < (X+1)^2 + Y^2 = X^2+Y^2+2X+1 < X^2+Y^2-2X+1$

donc $\left| i.\frac{Z+1}{Z-1} \right|^2 < 1$ donc $\left| i.\frac{Z+1}{Z-1} \right| < 1$

donc $i\,\frac{Z+1}{Z-1} \in D$.

Donc l'équation $h(z) = Z$ a une unique solution $z \in D$.

Ainsi h induit une bijection de D sur P

et $\boxed{\forall Z \in P,\ h^{-1}(Z) = i\,\frac{Z+1}{Z-1}}$

Exercice 4

1. Comme $A \subseteq E$ et $E \nsubseteq A$ on sait qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin A$.

Pour $X = \{x_0\}$ on a $\varphi_A(X) = \{x_0\} \cap A = \emptyset = \emptyset \cap A = \varphi_A(\emptyset)$

Comme $X \neq \emptyset$, ceci prouve que φ_A n'est pas injective sur $\mathcal{P}(E)$

De plus $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\varphi_A(X) = X \cap A \subset A \neq E$

donc E n'a pas d'antécédent par φ_A.

Donc φ_A n'est pas surjective de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E)$.

Si $A = E$ alors $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\varphi_A(X) = X \cap E = X$

donc $\varphi_A = id_{\mathcal{P}(E)}$

Donc φ_A est bijective de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E)$.

2. Si $A \neq \emptyset$ il existe $x_0 \in A$.

Alors $\psi_A(\{x_0\}) = \{x_0\} \cup A = A = \emptyset \cup A = \psi_A(\emptyset)$

Comme $\{x_0\} \neq \emptyset$ ceci prouve que ψ_A n'est pas injective sur $\mathcal{P}(E)$

De plus $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\psi_A(X) = X \cup A \neq \emptyset$

car $x_0 \in A$ donc $x_0 \in X \cup A$.

$\emptyset$ n'a donc pas d'antécédent par ψ_A.

Donc ψ_A n'est pas surjective de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E)$.

Si $A=\emptyset$: $\forall X\in \mathcal{P}(E)$, $\varphi_A(X)=\emptyset\cup X=X$

donc $\varphi_A=\mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Ainsi φ_A est bijective de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E)$.