Correction du DS2

EXERCICE 1

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array} \qquad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

D'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists!\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$.

En particulier pour $y = 0$:

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ a une unique solution notée } \alpha \in \mathbb{R}}$

On a $f(0) = -1 < 0 = f(\alpha) < 2 = f(1)$.

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\alpha \in]0,1[}$

2. Pour le polynôme $x^2 + 2x + 2$ on a $\Delta = -4 < 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 2 > 0$.

f est donc dérivable sur $]-1,+\infty[$ et donc continue sur $]-1,+\infty[$.

$$\forall x > -1,\quad f'(x) = -\frac{\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2} = -\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^{3/2}} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$.

x	-1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

$f(]-1,+\infty[) =]0,1[$

D'après le théorème de la bijection monotone, f induit une bijection de $]-1,+\infty[$ vers $]0,1[$.

On note encore f pour $f_{|]-1,+\infty[}^{|]0,1[}$

Si $y \in]0,1[$:

$$y = f(x) \iff y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \iff x^2+x+1 = \frac{1}{y^2}$$

$$\iff (x+1)^2 + 1 = \frac{1}{y^2}$$

$$\iff (x+1)^2 = \frac{1}{y^2} - 1$$

$$\iff x+1 = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$ car $0<y<1$ donc $4-3y^2>0$

$$\iff x = -1 \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\iff x = -1 + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$ car on veut $x > -1$

Donc $\boxed{\forall y \in]0,1[,\ f^{-1}(y) = -1 + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}}$

Exercice 2

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} F$$

Comme $f\circ g\circ f$ est bijective on a :

$$(f\circ g\circ f)\circ(f\circ g\circ f)^{-1} = id_F$$

Si on pose $\varphi = g\circ f\circ(f\circ g\circ f)^{-1}$

Alors $\varphi : F \longrightarrow E$ et $f\circ\varphi = id_F$

On en déduit que f est surjective.

De même $(f\circ g\circ f)^{-1}\circ(f\circ g\circ f) = id_E$

Donc si on pose $\Psi = (f\circ g\circ f)^{-1}\circ f\circ g$ alors

$\Psi : F \longrightarrow E$ et $\Psi\circ f = id_E$

On en déduit que f est injective.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$

Mais $g = f^{-1}\circ(f\circ g\circ f)\circ f^{-1}$

donc $\boxed{g \text{ est aussi bijective}}$ comme composées de bijections.

EXERCICE 3

1.(a) Si on partitionne $[\![1,n]\!]$ en k parties non vides et deux à deux disjointes alors $[\![1,n]\!]$ doit contenir au moins k éléments ie $n \geqslant k$.

Par contraposée si $k > n$ alors on ne peut pas partitionner $[\![1,n]\!]$ en k parties non vides donc $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$.

1.(b) • On partitionne $\{1;2\}$ en 1 partie : $\{\{1;2\}\}$

donc $\left\{ {2 \atop 1} \right\} = 1$

• On partitionne $\{1;2\}$ en 2 parties : $\{\{1\};\{2\}\}$

donc $\left\{ {2 \atop 2} \right\} = 1$

• On partitionne $\{1;2;3\}$ en 1 partie : $\{\{1;2;3\}\}$

donc $\left\{ {3 \atop 1} \right\} = 1$

• On partitionne $\{1;2;3\}$ en 2 parties :

$\{\{1\};\{2;3\}\}$ ou $\{\{1;3\};\{2\}\}$ ou $\{\{1;2\};\{3\}\}$

donc $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3$

• On partitionne $\{1;2;3\}$ en 3 parties : $\{\{1\};\{2\};\{3\}\}$

donc $\left\{ {3 \atop 3} \right\} = 1$

<u>1.(c)</u> • On partitionne $[\![1,n]\!]$ en 1 partie : $\{[\![1,n]\!]\}$

donc $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$ si $n \neq 0$

⚠ $\left\{ {0 \atop 1} \right\} = 0$ d'après l'énoncé

• On partitionne $[\![1,n]\!]$ en n parties : $\{\{1\};\{2\},\dots,\{n\}\}$

donc $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ si $n \neq 0$

C'est vrai si $n=0$ d'après l'énoncé

<u>1.(d)</u> On partitionne $[\![1,4]\!]$ en 2 parties :

$\{\{1\};\{2;3;4\}\}$ ou $\{\{1;3;4\};\{2\}\}$ ou $\{\{1;2;4\};\{3\}\}$

ou $\{\{1;2;3\};\{4\}\}$

ou $\{\{1;2\};\{3;4\}\}$ ou $\{\{1;3\};\{2;4\}\}$ ou $\{\{1;4\};\{2;3\}\}$

Donc $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

<u>1.(e)</u> D'après 1.(a) : $\left\{ {1 \atop 2} \right\} = 0$ et $2^{1-1} - 1 = 1 - 1 = 0$

donc si $n=1$: $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

Si $n \geq 2$. On veut diviser $[\![1,n]\!]$ en deux parties non vides.

Il y a $2^n - 2$ choix d'une partie A non vide

telle que $\overline{A} \neq \emptyset$ (ie $A \neq [\![1,n]\!]$).

Comme $\{A, \overline{A}\}$ et $\{\overline{A}, A\}$ donnent les mêmes partitions on a

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 .$$

1.(f) Soit $n \geq 2$.

Pour diviser $[\![1, n]\!]$ en $n-1$ parties non vides on doit avoir $n-2$ parties à 1 éléments et 1 partie à 2 éléments.

On a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ choix de ces 2 éléments et cela définit alors une partition à $n-1$ parties.

$$\text{Donc } \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \frac{n(n-1)}{2} .$$

2.(a) Cela revient à compter les partitions de $[\![2, n]\!]$ en $k-1$ parties. Il y en a $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$.

2.(b) Dans ce cas $\{A_1 \setminus \{1\}, A_2, \dots, A_k\}$ est une partition de $[\![2, n]\!]$ en k parties. Il y en a $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$

Réciproquement si on se donne une partition de $[\![2, n]\!]$ en k parties, on doit ajouter $\{1\}$ à une de ces parties pour obtenir une partition de $[\![1, n]\!]$ en k parties.

Donc au total cela fait $k \times \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ possibilités.

2.(c) Au total : $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$

2.(d)

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0
6	0	1	31	90	65	15	1

3. Pour construire une surjection de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ on doit choisir pour chaque $y \in [\![1,n]\!]$ un ou plusieurs antécédents dans $[\![1,p]\!]$. Cela donne une partition de $[\![1,p]\!]$ en n parties.
Réciproquement une partition de $[\![1,p]\!]$ en n parties définit $n!$ surjections (on affecte à chacune de ces n parties une image dans $[\![1,n]\!]$).

Donc $S_n^p = n! \times \left\{ {p \atop n} \right\}$

4.(a) $$x^{\underline{k+1}} + k x^{\underline{k}} = x(x-1)\times\dots\times(x-k+1)\times(x-k)$$
$$+ kx(x-1)\times\dots\times(x-k\ \ )\times(x-k+1)$$
$$= x(x-1)\times\dots\times(x-k\ \ )\times[\ x-k+k\ ]$$
$$= x^{\underline{k}} \times x$$

4.(b) On fixe $x \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P(n)$ le prédicat "$x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{k}$".

Pour $n=1$. $x^1 = x$

$$\sum_{k=1}^{1} \left\{ {1 \atop k} \right\} x^{1} = \left\{ {1 \atop 1} \right\} x^{1} = 1 \times x = x$$

donc $P(1)$ est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vrai.

$$x^{n+1} = x \times x^n = x \times \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{k} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x \times x^{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \left\{ {n \atop k-1} \right\} x^{k} + \sum_{k=1}^{n} k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{k}$$

$$= \left\{ {n \atop n} \right\} x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \left(\left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\} \right) x^{k} + \left\{ {n \atop 1} \right\} x^{1}$$

$$= 1 . x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^{k} + 1 . x^{1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^{k} \quad \text{car} \quad \left\{ {n+1 \atop 1} \right\} = \left\{ {n+1 \atop n+1} \right\} = 1$$

Donc $P(n+1)$ est vrai.

Ccl $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5.(a) On compte les partitions de $[\![1,n+1]\!]$ en $p+1$ parties selon que $\mathrm{Card}(A_1)=n-k+1$ avec $k\in[\![p,n]\!]$.
On choisit $n-k$ éléments de $[\![2,n+1]\!]$ à qui on ajoute $\{1\}$ pour former A_1 : $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite, on partitionne $[\![1,n+1]\!]\setminus A_1$ en parties : $\left\{ {k \atop p} \right\}$ possibilités.

Au total : $\left\{ {n+1 \atop p+1} \right\} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} \times \left\{ {k \atop p} \right\}$

5.(b) Si on partitionne $[\![1,n]\!]$ en $l+p$ parties, les p parties non marquées représentent au moins p éléments donc les l parties marquées en représentent au maximum $n-p$.
Donc le nombre total d'éléments des l parties marquées est un entier $k\in[\![l,n-p]\!]$.
Si on fixe k alors on choisit les k éléments de $[\![1,n]\!]$, on les partitionne en l parties marquées, puis on partitionne les $n-k$ éléments restants en p parties :
$$\binom{n}{k}\times\left\{ {k \atop l} \right\}\times\left\{ {n-k \atop p} \right\} \text{ possibilités.}$$

Au total : $\sum_{k=l}^{n-p} \binom{n}{k}\times\left\{ {k \atop l} \right\}\times\left\{ {n-k \atop p} \right\}$

Mais le nb total est $\left\{ {n \atop l+p} \right\}\times\binom{l+p}{l}$: on partitionne en $l+p$ parties puis on en marque l. D'où le résultat.