Correction du DS3

Exercice 1

1.(a) $|-2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

et $-2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

1.(b) On a donc :

$$z^3 = -2+2i \iff z^3 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3$$

$$\iff \left(\frac{z}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\right)^3 = 1$$

$$\iff \frac{z}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = 1 \text{ ou } j \text{ ou } \bar{j}$$

$$\iff z = 1 \text{ ou } \sqrt{2}je^{i\pi/4} \text{ ou } \sqrt{2}\bar{j}e^{i\pi/4}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{S = \left\{\sqrt{2}e^{i\pi/4} ; \sqrt{2}e^{i11\pi/12} ; \sqrt{2}e^{-i5\pi/12}\right\}}$$

1.(c) On vient de donner les solutions sous forme trigonométrique.

$\sqrt{2}e^{i\pi/4} = \boxed{1+i}$

$$\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = (1+i)j = \boxed{-\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}$$

$$\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}} = (1+i)\bar{j} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

1.(d) On a donc $\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\pm\sqrt{3}-1}{2}$

Mais $\frac{11\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ donc $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) \leqslant 0$

Comme $\sqrt{3} > 1$ on a donc $\boxed{\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$

Et donc $\boxed{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$

2.(a) $z^3 = 6z - 4$

donc $(u+v)^3 = 6(u+v) - 4$

ie $u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = 6(u+v) - 4$

Mais $3u^2v + 3uv^2 = 3uv(u+v) = 6(u+v)$

On obtient que $\boxed{u^3 + v^3 = -4}$

De plus $u^3v^3 = (uv)^3 = 2^3 = \boxed{8}$

2.(b) On a le système somme – produit :

$$\begin{cases} u^3+v^3=-4 \\ u^3v^3=8 \end{cases}$$

donc u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation

$$z^2+4z+8=0$$

$$\Delta=16-32=-16$$

donc $z=\dfrac{-4\pm i4}{2}=-2\pm 2i$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a donc } (u^3=-2+2i \text{ et } v^3=-2-2i) \\ \quad \text{ou } (u^3=-2-2i \text{ et } v^3=-2+2i)\end{array}}$$

- D'après 1.(a) : $u^3=-2+2i$

  donne $u=1+i$ ou $(1+i)j$ ou $(1+i)\bar{j}$

  et alors $v^3=-2-2i=\overline{(-2+2i)}$

  donne $\bar{v}^3=-2+2i$

  et donc $\bar{v}=1+i$ ou $(1+i)j$ ou $(1+i)\bar{j}$

  ie $v=1-i$ ou $(1-i)\bar{j}$ ou $(1-i)j$

- Si $u^3=-2-2i$ on inverse u et v dans les formules précédentes.

Comme $uv = 2$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} (u,v) = (1+i\,;\,1-i) \text{ ou } (1-i\,;\,1+i) \\ (u,v) = ((1+i)j\,,\,(1-i)\bar{j}) \text{ ou } ((1-i)\bar{j}\,,\,(1+i)j) \\ (u,v) = ((1+i)\bar{j}\,,\,(1-i)j) \text{ ou } ((1-i)j\,;\,(1+i)\bar{j}) \end{array}}$$

3. Si z solution de $(*)$ on a donc :

$$z = u+v = 2 \text{ ou } -(1+\sqrt{3}) \text{ ou } \sqrt{3}-1$$

Réciproquement on vérifie que ce sont bien des solutions de l'équation.

Par analyse – synthèse l'ensemble des solutions de l'équation $(*)$ est donc :

$$\boxed{S = \{2\,;\,-1-\sqrt{3}\,;\,-1+\sqrt{3}\}}$$

Exercice 2

1.(a) D'après le cours : $\binom{n}{p}$

1.(b).i : On trouve $\binom{k}{p} \times \binom{n-k}{0}$ avec le modèle de l'urne bicolore (blanches : n° $\leq k$ et noires : n° $\geq k+1$).

Donc : $\binom{k}{p}$.

1.(b).ii : On trouve $\binom{k-1}{p-1} \times \binom{1}{1} \times \binom{n-k}{0}$ avec le modèle de l'urne tricolore (blanches : n° $\leq k-1$, noires : n° $= k$, vertes : n° $\geq k+1$).

Donc : $\binom{k-1}{p-1}$.

1.(c) Lorsqu'on pioche p boules simultanément le plus grand numéro est un entier $k \in [\![p, n]\!]$, dans $\binom{k-1}{p-1}$ cas.

Au total on trouve : $\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1}$ cas possibles

D'après 1.(a) on a donc : $\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1}$

2.(a) D'après le cours : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\times\dots\times(n-p+1)$

2.(b) On trouve : $1\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times(n-p+1) = \dfrac{(n-1)!}{(n-p)!}$

donc A_{n-1}^{p-1}

3.(a) D'après le cours : n^p.

3.(b) On choisit deux numéros distincts et on met le plus petit numéro en premier et le plus grand en dernier : $\binom{n}{2}$ façons

On choisit les $p-2$ autres numéros avec remise : n^{p-2} façons.

Au total : $\binom{n}{2}\times n^{p-2}$ façons.

3.(c) Si la somme des p numéros donne $p+2$ on a 2 cas possibles : on a tiré $p-2$ fois la boule 1 et 2 fois la boule 2 ou $p-1$ fois la boule 1 et 1 fois la boule 3.

Au total : $\underbrace{\binom{p}{2}}_{\text{choix des 2 tirages qui donnent la boule 2}} + \underbrace{\binom{p}{1}}_{\text{choix du tirage qui donne la boule 3}} = \dfrac{p(p-1)}{2}+p = \dfrac{p(p+1)}{2} = \binom{p+1}{2}$

3.(c) On choisit les deux numéros distincts : $\binom{n}{2}$ façons

Pour chaque tirage on choisit un des 2 numéros :

2^p façons

mais on ne doit pas compter les cas où on a tiré toujours le même donc : $2^p - 2$ façons.

Au total : $\binom{n}{2} \times (2^p - 2)$ façons.

Exercice 3

Partie 1

1.(a) $e^{it} = 1 \iff t = 0\ [2\pi]$

Ici $t \in]0, 2\pi[$ donc $\boxed{e^{it} \neq 1}$

1.(b) $A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} (e^{it})^k \underset{e^{it}\neq 1}{=} \dfrac{1-(e^{it})^{n+1}}{1-e^{it}}$

$$= \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}$$

$$= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{it/2}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{-it/2} - e^{i\frac{t}{2}}}$$

$$= e^{i\frac{nt}{2}} \times \frac{-\cancel{2i} \cdot \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{-\cancel{2i} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \boxed{e^{i\frac{nt}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

Or $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikt}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right)$

$$= \mathrm{Re}(A_n(t)) = \boxed{\cos\left(\frac{nt}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

2.(a) $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \iff \frac{t}{2} = 0\ [\pi] \iff t = 0\ [2\pi]$

Ici $t \in]0, 2\pi[$ donc $\boxed{\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0}$

2.(b) $S_n(t) \times \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \times \sin\left(\frac{t}{2}\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{2}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right]$$

$$\xleftarrow{\text{somme télescopique}} = \frac{1}{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$= \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \times \cos\left(\frac{nt}{2}\right)$$

car $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc $\boxed{S_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \times \cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$

3. $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} + \dots + e^{-it} + 1 + e^{it} + \dots + e^{int}$

$$= 2 + 2\cos t + 2\cos(2t) + \dots + 2\cos(nt) - 1$$

$$= \left[2\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)\right] - 1 = 2 \times S_n(t) - 1$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1$$

$$= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 = \boxed{\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

Partie 2

1. (a) D'après la partie 1 on a $D_k(t) = \dfrac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

Donc $F_n(t) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{n.\sin\left(\frac{t}{2}\right)} . \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right)}$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right).$

et puisque $e^{it} \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t} = e^{i\frac{t}{2}} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{it}\right)^k = e^{i\frac{t}{2}} . \frac{1-\left(e^{it}\right)^n}{1-e^{it}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{i\frac{t}{2}}} . e^{i\frac{nt}{2}}}{\cancel{e^{i\frac{t}{2}}}} \times \frac{e^{-i\frac{nt}{2}} - e^{\frac{int}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{it/2}}$$

$$= e^{i\frac{nt}{2}} \times \frac{\cancel{-2i}.\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\cancel{-2i}.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Donc $F_n(t) = \dfrac{1}{n.\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \times \dfrac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \boxed{\dfrac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{n.\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}$

<u>1.(b)</u> $D_k(t) = \dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}} \times \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \times \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) \times \sin\frac{t}{2}$

$$= \boxed{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \times \frac{1}{2}\left[\cos(kt) - \cos(k+1)t\right]}$$

Donc $F_n(t) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$

$$= \frac{1}{2n\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \times \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(kt) - \cos((k+1)t)\right)$$

$$= \frac{1}{2n\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \times \left(1 - \cos(nt)\right)$$

Mais $1 - \cos(nt) = 1 - \cos\left(2\frac{nt}{2}\right) = 1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{nt}{2}\right)$

$$= 2\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)$$

Donc $\boxed{F_n(t) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}$

2.(a) On a $D_k(t) = \sum_{p=-k}^{k} e^{ipt}$

donc $F_n(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{p=-k}^{k} e^{ipt} \right)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & -1 & 0 & 1 & & & \\
 & & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & & \\
 & \cdot & & & \vdots & & & \cdot & \\
-(n-1) & \cdots & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & n-1
\end{array}$$

k va de 0 à n−1

Sur la k-ième ligne : p va de −k à k.

Si on somme les termes en colonne, alors p va −(n−1) à (n−1) et sur la p-ième colonne k varie de |p| à n−1.

Donc on a aussi $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{p=-(n-1)}^{n-1} \left(\sum_{k=|p|}^{n-1} e^{ipt} \right)$

$$= \boxed{\frac{1}{n} \sum_{p=-(n-1)}^{n-1} (n-|p|) e^{ipt}}$$

Donc $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{p=-n}^{n} (n-|p|) e^{ipt}$ (on ajoute 2 termes nuls)

$$\boxed{F_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} \left(1 - \frac{|p|}{n}\right) e^{ipt}}$$

Partie 3

1. • Si $n=1$ alors $\omega=1$ et $S_n(1)=\sum_{k=0}^{0} 1^k = \boxed{1}$

• Si $n \geqslant 2$ alors $\omega \neq 1$ et :

$$S_n(1) = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \boxed{0} \quad \text{car } \omega^n = 1$$

2. • Si $n=1$ alors $\omega=1$ donc $\forall \ell \in \mathbb{Z}$, $S_n(\ell) = 1 = n$

et ℓ est divisible par 1

• Si $n \geqslant 2$. $\omega^\ell = e^{i\frac{2\pi \ell}{n}} = 1 \iff \frac{2\pi\ell}{n} = 0 \ [2\pi]$

$\iff \ell = 0 \ [n]$

$\iff n$ divise ℓ

donc si n divise ℓ alors $S_n(\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \boxed{n}$

Et si n ne divise pas ℓ alors $S_n(\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^\ell)^k = \frac{1-(\omega^\ell)^n}{1-\omega}$

mais $(\omega^\ell)^n = (\omega^n)^\ell = 1^\ell = 1$

donc $S_n(\ell) = \boxed{0}$

• Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \ell \in \mathbb{Z}, \ S_n(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ ne divise pas } \ell \\ n & \text{si } n \text{ divise } \ell \end{cases}}$

Partie 4

1. On a $F_d\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{p=-d}^{d}\left(1-\frac{|p|}{d}\right)e^{i\frac{2kp\pi}{n}}$

d'après la formule de la partie 2 question 2.(b)

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} d\times F_d\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{p=-d}^{d} d.\left(1-\frac{|p|}{d}\right)e^{i\frac{2kp\pi}{n}}\right)$

$$=\sum_{p=-d}^{d}\left(\sum_{k=1}^{n-1} d.\left(1-\frac{|p|}{d}\right)e^{i\frac{2kp\pi}{n}}\right)$$

$$=\sum_{p=-d}^{d}\left[d\left(1-\frac{|p|}{d}\right)\sum_{k=1}^{n-1}e^{i\frac{2kp\pi}{n}}\right]$$

Comme $p\in[\![-d,d]\!]$ et comme $1\leq d\leq n-1$

on a $p\in[\![-(n-1),(n-1)]\!]$.

Donc pour $p\in[\![-d,d]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}e^{i\frac{2kp\pi}{n}}=\begin{cases}-1 & \text{si } d\neq 0\\ n-1 & \text{si } d=0\end{cases}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} d F_d\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{\substack{p=-d\\ p\neq 0}}^{d} d\left(1-\frac{|p|}{d}\right)\times(-1)+d\times(n-1)$

$$=-2\sum_{p=1}^{d} d\left(1-\frac{p}{d}\right)+d\times(n-1)$$

$$=-2\left(d^2-\frac{d}{d}\cdot\frac{d(d+1)}{2}\right)+d\times(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} d.F_d\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = -2d^2 + d(d+1) + dn - d$$
$$= -d^2 + dn = d.(n-d)$$

D'autre part avec la formule de la partie 2 question 1.(a)

on a : $F_d\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{kd\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$

donc : $\sum_{k=1}^{n-1} d.F_d\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{kd\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{kd\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = d \times (n-d)}$$

2.(a) $\frac{\sin(dt)}{\sin t} = \frac{e^{idt} - e^{-idt}}{\cancel{2i}} \times \frac{\cancel{2i}}{e^{it} - e^{-it}}$

$$= \frac{e^{idt} - e^{-idt}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{e^{idt}}{e^{it}} \times \frac{1 - e^{-2idt}}{1 - e^{-2it}}$$

$$= e^{i(d-1)t} \times \sum_{p=0}^{d-1} \left(e^{-2it}\right)^p = \boxed{e^{i(d-1)t} \cdot \sum_{p=0}^{d-1} e^{-2ipt}}$$

Et de même :

$$\frac{\sin(dt)}{\sin t} = \frac{e^{idt} - e^{-idt}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{e^{-idt}}{e^{-it}} \times \frac{e^{2idt} - 1}{e^{2it} - 1}$$

$$= e^{-i(d-1)t} \times \sum_{p=0}^{d-1} \left(e^{2it}\right)^p = \boxed{e^{-i(d-1)t} \times \sum_{p=0}^{d-1} e^{2ipt}}$$

2.(b) Par produit on trouve donc :

$$\frac{\sin^2(dt)}{\sin^2 t} = \sum_{(p,q)\in[\![0,d-1]\!]^2} e^{i2(p-q)t}$$

$$= d + \sum_{\substack{(p,q)\in[\![0,d-1]\!]^2 \\ p\neq q}} e^{i2(p-q)t}$$

2.(c) Si $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors $\frac{k\pi}{n} \in]0,\pi[$ donc on peut choisir $t = \frac{k\pi}{n}$:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = d + \sum_{\substack{(p,q)\in[\![0,d-1]\!]^2 \\ p\neq q}} e^{i2(p-q)\frac{k\pi}{n}}$$

On somme pour k allant de 1 à $n-1$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (n-1)\times d + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{p\neq q} e^{i2(p-q)\frac{k\pi}{n}}\right)$$

$$= (n-1)\times d + \sum_{p\neq q}\left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{i2(p-q)\frac{k\pi}{n}}\right)$$

si $(p,q)\in[\![0,d-1]\!]^2$ et $p\neq q$ alors $|p-q|\in[\![1,n-1]\!]$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} e^{i2(p-q)\frac{k\pi}{n}} = -1$

Donc : $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (n-1)\times d + \sum_{p\neq q} -1$$

$$= (n-1)\times d + d(d-1)\times(-1)$$

$$= nd - d - d^2 + d$$

$$= nd - d^2$$

$$= \boxed{d\times(n-d)}$$