Correction du DS4

Exercice 1

1.(a) Pour $x>0$: $z(x) = xy'(x) - y(x)$.

Comme y est 2 fois dérivable sur $]0,+\infty[$ on a z dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables.

$$\forall x>0,\ xz'(x) - z(x) = x\left(y'(x) + xy''(x) - y'(x)\right) - xy'(x) + y(x)$$
$$= x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^3$$

1.(b) On a donc $\forall x>0,\ z'(x) - \frac{1}{x}z(x) = x^2$

* $z' - \frac{1}{x}z = 0$ donne qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x>0,\ z_0(x) = Ce^{\ln x} = Cx$$
* on cherche une solut° particulière de $z' - \frac{1}{x}z = x^2$ sous la forme $\forall x>0,\ z_1(x) = C(x) \times x$

On le réinjecte : $\forall x>0,\ C'(x) \times x + 0 = x^2$

ie $C'(x) = x$

On choisit $\forall x>0,\ C(x) = \frac{x^2}{2}$ et donc $z_1(x) = \frac{x^3}{2}$

* on a donc $\forall x>0,\ z(x) = Cx + \frac{x^3}{2}$ où C constante réelle

<u>1.(c)</u> On a donc $\forall x>0,\ xy'(x)-y(x)=Cx+\frac{x^3}{2}$

pour un $C\in\mathbb{R}$.

Donc $\forall x>0,\ y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=C+\frac{x^2}{2}$

* $y'-\frac{1}{x}y=0$ donc il existe un réel D
 tel que $\forall x>0,\ y_0(x)=De^{\ln x}=Dx$

* on cherche une solut° particulière sous la forme
 $\forall x>0,\ y_1(x)=D(x)\times x$

 On la réinjecte : $\forall x>0,\ D'(x)\times x+0=C+\frac{x^2}{2}$
 donc $D'(x)=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}$

 On choisit : $\forall x>0,\ D(x)=C\ln(x)+\frac{x^2}{4}$
 et donc $y_1(x)=Cx\ln(x)+\frac{x^3}{4}$

* on a donc $\forall x>0,\ y(x)=Dx+Cx\ln(x)+\frac{x^3}{4}$
 où C et D sont deux réels.

<u>2.</u> Synthèse Soient C et D deux réels.

On pose $\forall x>0,\ y(x)=Dx+Cx\ln(x)+\frac{x^3}{4}$

D'après les calculs de 1.(c) :

$\forall x>0,\ xy'(x)-y(x)=Cx+\frac{x^3}{2}$

Puis d'après cours de 1.(b) si on pose $z(x)=xy'(x)-y(x)$

$\forall x>0,\ xz'(x)-z(x)=x^3$

ce qui donne $\forall x>0,\ x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=x^3$

Donc y est solution de (E).

$\boxed{\text{Ccl Les solutions de } (E) \text{ sont toutes les fonctions de la forme } y : x \longmapsto Dx + Cx\ln(x) + \frac{x^3}{4} \text{ où } C \text{ et } D \text{ sont des constantes réelles.}}$

Exercice 2

1.(a) D'après le théorème fondamental de l'analyse on a $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$

puisque f et g sont supposées continues sur $[a,b]$.

G et F sont de classe C^1 sur $[a,b]$ donc $G-F$ aussi et :

$$\forall x \in [a,b],\ (G-F)'(x) = G'(x) - F'(x)$$
$$= g(x) - f(x) \geqslant 0$$

Donc $G-F$ est croissante sur $[a,b]$.

De plus $(G-F)(a) = G(a) - F(a) = 0 - 0 = 0$

Donc $G-F$ est positive sur $[a,b]$.

1.(b) On a donc $\forall x \in [a,b]$, $G(x) - F(x) \geqslant 0$

donc $\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^x g(t)\,dt$

En particulier pour $x=b$: $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt}$

2.(a)
$$\int_0^1 \underbrace{e^t}_{u(t)} \times \underbrace{(1-t)^n}_{v'(t)}\,dt \underset{IPP}{=} \left[e^t \frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^t}_{u'(t)} \times \underbrace{\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}}_{v(t)}\,dt$$

L'IPP est licite car u et v sont C^1 sur $[0,1]$

$$= \frac{+1}{n+1} + \int_0^1 e^t \times \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\,dt$$

2(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ le prédicat :

$$\text{“} e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{e^t}{n!} \times (1-t)^n \, dt \text{”}$$

Pour $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{e^t}{n!}(1-t)^n \, dt = \frac{1}{0!} + \int_0^1 e^t \, dt$

$$= 1 + e - 1 = e$$

donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel $P(n)$ est vrai.

On a donc
$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{e^t}{n!}(1-t)^n \, dt$$
$$\underset{2.(a)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 e^t \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \, dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 e^t \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \, dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{e^t}{(n+1)!} \times (1-t)^{n+1} \, dt$$

donc $P(n+1)$ est vrai.

Conclusion : $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^1 (1-t)^n \, dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 0 - \frac{-1}{n+1} = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

<u>2.(d)</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2.(b) :

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{e^t}{n!} \times (1-t)^n dt$$

Or $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant e^t \leqslant e$
et $0 \leqslant (1-t)^n$

donc $0 \leqslant \frac{e^t}{n!} \times (1-t)^n \leqslant \frac{e}{n!}(1-t)^n$

Avec le résultat de 1. on a :

$$0 = \int_0^1 0\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{n!}(1-t)^n dt \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!}(1-t)^n dt = \frac{e}{n!} \times \int_0^1 (1-t)^n dt$$

$$= \frac{e}{(n+1)!}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$

<u>2.(e)</u> Soit $n \geqslant 2$. On pose $a_n = n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$

Or si $k \in [\![0,n]\!]$, $\frac{n!}{k!} = n \times (n-1) \times \dots \times (k+1) \in \mathbb{N}$.

et donc $\underline{a_n \in \mathbb{N}}$ (somme d'entiers naturels).

D'après 2(d) : $\frac{1}{n+1} \leqslant n!e - a_n \leqslant \frac{e}{n+1}$

or $\frac{1}{n+1} > 0$ et $\frac{e}{n+1} < 1$ car $2,7 < e < 2,8$ et $n \geqslant 2$

Donc $0 < n! \times e - a_n < 1$

et donc $a_n < n! \times e < a_n + 1$

2.(f) Par l'absurde on suppose que $e \in \mathbb{Q}$.
Donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$

Comme $e \notin \mathbb{Z}$ on a $q \geq 2$.

D'après 2.(e) :

$$a_q < q! \times e < a_q + 1$$

ie $$a_q < (q-1)! \times p < a_q + 1$$

ie $$0 < (q-1)! \times p - a_q < 1$$

Ceci est absurde car le nombre $(q-1)! \times p - a_q$ est un entier.

Donc e est un nombre irrationnel.

Exercice 3

1.(a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x \geq 0,\quad f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} - 6x^{n+1}e^{-x^2}$$
$$= 3x^{n-1}e^{-x^2} \times (n - 2x^2)$$

du signe de $n - 2x^2$

x	0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	-1	$\nearrow$	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	$\searrow$	-1

- $f_n(0) = 0$
- par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n/2}e^{-t} = 0$

comme $x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x^2} = 0$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -1$

- $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 3\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \times e^{-\frac{n}{2}} - 1 = 3\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2} - 1 \underset{n\geq 2}{\geq} 3\times\left(\frac{2}{2e}\right)^{2/2} - 1 = \frac{3}{e} - 1 > 0$

f_n est continue et strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$
donc bijective de $\left[0, \sqrt{n/2}\right]$ vers $f_n\left(\left[0, \sqrt{n/2}\right]\right) = \left[0, f_n\left(\sqrt{n/2}\right)\right]$

Comme $0 \in [0, f_n(\sqrt{n/2})]$:

$\exists ! \, u_n \in [0, \sqrt{n/2}]$; $f_n(u_n) = 0$.

De même f_n est bijective de $]\sqrt{n/2}, +\infty[$ vers

$]-1, f_n(\sqrt{n/2})[$ donc $\exists ! \, v_n \in]\sqrt{n/2}, +\infty[$; $f_n(v_n) = 0$

Donc sur $\mathbb{R}^+$ l'équation $f_n(x) = 0$ a deux solutions notées u_n et v_n et vérifiant $0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}} < v_n$.

1(b) $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$ car $e < 3$

Comme $n \geq 2$ on a $\frac{n}{2} \geq 1$ donc $\sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$

donc $1 \in [0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$.

Comme f_n strictement croissante sur $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ on a

$u_n < 1$

et $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}}$ donc $v_n > 1$.

2. (u_n) est croissante et converge vers 1.

(v_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

3.(a) $f_{n+1}(v_n) = 3v_n^{n+1}e^{-v_n^2} - 1$

sachant que $f_n(v_n) = 0 = 3v_n^n e^{-v_n^2} - 1$

on a $f_{n+1}(v_n) = 3v_n^{n+1}e^{-v_n^2} - 3v_n^n e^{-v_n^2}$

$= 3v_n e^{-v_n^2} \times (v_n - 1) > 0$

car $v_n > 1$

Or $\forall x \geqslant v_{n+1}$, $f_{n+1}(x) \leqslant 0$

donc $v_n < v_{n+1}$.

Ainsi $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante.

3.(b) On a vu que $\forall n \geqslant 2$, $\sqrt{\frac{n}{2}} \leqslant v_n$

Donc par minoration $\boxed{v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$.

4.(a) De même $f_{n+1}(u_n) = 3u_n e^{-u_n^2} \times (u_n - 1) < 0$

car $u_n < 1$

Donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

or $u_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2}}$ et $u_{n+1} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2}}$

et f_{n+1} est strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]$

donc $u_n \leq u_{n+1}$. Ainsi $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante.

4.(b) Comme $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante majorée par 1 (11)
elle est convergente vers $l \in [0,1]$ (car $\forall n \geq 2, u_n \geq 0$)

4.(c) Par l'absurde si $l \in [0,1[$.

$$\ln u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} \ln l & \text{si } 0 < l < 1 \\ -\infty & \text{si } l = 0^+ \end{cases}$$

donc $n . \ln u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

donc $u_n^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Or $e^{-u_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-l^2}$

donc $u_n^n e^{-u_n^2} \longrightarrow 0$

Mais $\forall n \geq 2$, $u_n^n e^{-u_n^2} = \frac{1}{3}$

On a donc $0 = \frac{1}{3}$ ce qui est absurde.

On a donc $\boxed{l = 1}$