Correction du DS5

EXERCICE 1

1. $$\frac{1}{\cos x-1}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+2(\cos x-1)}{x^2(\cos x-1)}$$

On sait que $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$

On a donc $x^2(\cos x-1)\underset{x\to 0}{\sim} x^2\times -\frac{x^2}{2}=-\frac{x^4}{2}$

et $$x^2+2(\cos x-1)=x^2+\left(-x^2+\frac{x^4}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$$
$$=\frac{x^4}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

donc $x^2+2(\cos x-1)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^4}{12}$

Par quotient d'équivalents :
$$\frac{1}{\cos x-1}+\frac{2}{x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^4/12}{-x^4/2}=-\frac{1}{6}$$

On passe aux limites :
$$\boxed{\frac{1}{\cos x-1}+\frac{2}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}-\frac{1}{6}}$$

2. On pose $t = \frac{1}{h}$ avec $h \to 0$.

$$t^2\left(\sqrt{t^2+t} - \sqrt{t^2-t} - 1\right) = \frac{1}{h^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}} - \sqrt{\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{h^2} \times \left(\frac{\sqrt{h+1} - \sqrt{1-h}}{\sqrt{h^2}} - 1\right)$$

Si $h \to 0^+$ alors $h > 0$ donc $\sqrt{h^2} = h$:

$$t^2\left(\sqrt{t^2+t} - \sqrt{t^2-t} - 1\right) = \frac{1}{h^3}\left(\sqrt{1+h} - \sqrt{1-h} - h\right)$$

$$= \frac{1}{h^3} \times \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} - \left(1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16}\right) - h + \underset{h \to 0^+}{o}(h^3)\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \underset{h \to 0^+}{o}(1)$$

donc $\boxed{t^2\left(\sqrt{t^2+t} - \sqrt{t^2-t} - 1\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{1}{8}}$

Si $h \to 0^-$ alors $h < 0$ donc $\sqrt{h^2} = -h$:

$$t^2\left(\sqrt{t^2+t} - \sqrt{t^2-t} - 1\right) = \frac{1}{h^3}\left(-\sqrt{1+h} + \sqrt{1-h} - h\right)$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(-\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16}\right) + 1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} - h + \underset{h \to 0^-}{o}(h^3)\right)$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(-2h - \frac{h^3}{8} + \underset{h \to 0^-}{o}(h^3)\right)$$

$$= \frac{-2}{h^2} - \frac{1}{8} + \underset{h \to 0^-}{o}(h^3)$$

3

donc $t^2\left(\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t^2-t}-t\right)=-2t^2-\frac{1}{8}+\underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

donc $\boxed{t^2\left(\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t^2-t}-t\right)\xrightarrow[t\to-\infty]{}-\infty}$

EXERCICE 2

1.

```python
def suite(n):
    u=-2
    for k in range(n):
        u=-2+6/(3-u)
    return u
```

2.(a) f est dérivable sur $]-\infty, 3[$ et :

$$\forall x < 3,\ f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{(3-x)^2} > 0$$

x	$-\infty$		3
f	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathcal{C}_f$ a une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=-2$ et une asymptote verticale en 3 d'équation $x=3$.

De plus pour $x<3$:

$$f(x) = x \iff x = -2 + \frac{6}{3-x}$$

$$\iff x(3-x) = -2(3-x)+6$$

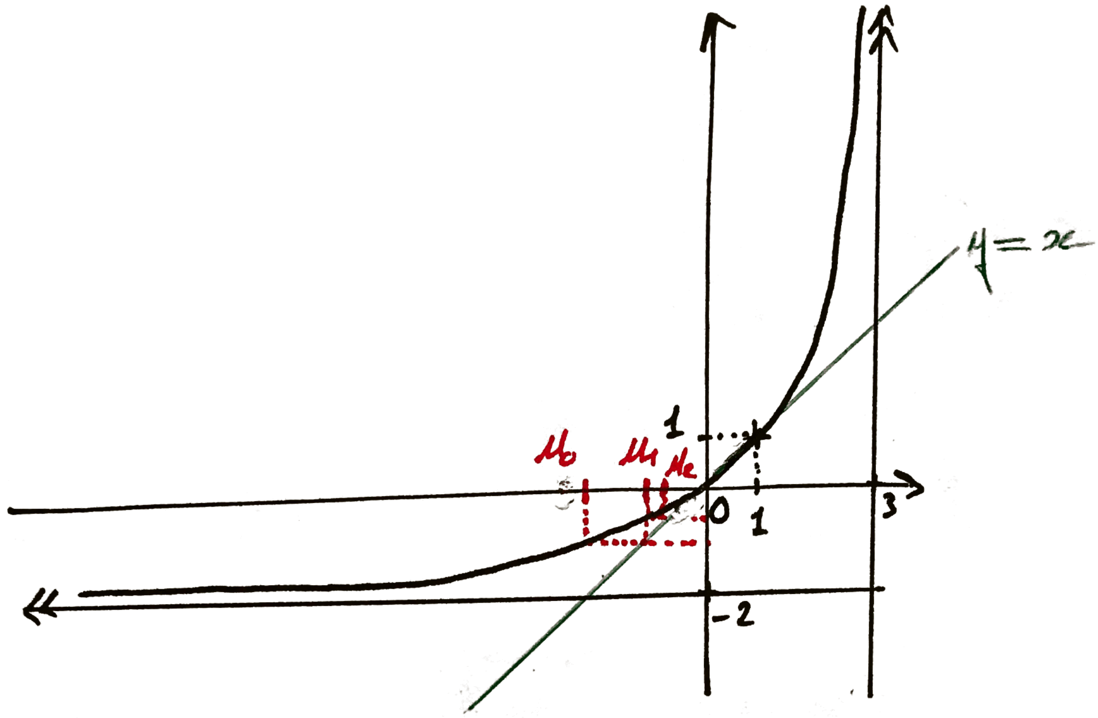
$$\iff -x^2 + x = 0$$

$$\iff x(1-x) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Donc f a deux points fixes : 0 et 1

2.(b)



Il semblerait que (u_n) est croissante et converge vers 0.

2.(c) Si $x<0$ alors $f(x) < f(0) = 0$
puisque f est strictement décroissante sur $]-\infty, 3[$.

Donc $\boxed{\forall x<0,\ f(x)<0}$

L'intervalle $I =]-\infty, 0[$ est donc f-stable.

Comme $u_0 = -2 \in I$ on sait par théorème que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in I$

ie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$.

2.(d) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -2 + \frac{6}{3-u_n} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{3-u_n} = u_n \times \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$$

or $u_n < 0$ donc $u_n - 1 < 0$ et $3 - u_n > 0$.

donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Comme elle est majorée par 0, elle converge donc vers un réel $l \leq 0$.

f est continue sur $]-\infty, 3[$ (c'est une fraction rationnelle) donc sur $]-\infty, 0]$ donc en l.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

on a lorsque $n \to +\infty$: $l = f(l)$

Comme $l \leq 0$: $l = 0$.

Ainsi $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

3.(a) On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$
donc $1 - u_n > 1$ donc $1 - u_n \neq 0$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

3.(b) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{-2+\frac{6}{3-u_n}}{1-\left(-2+\frac{6}{3-u_n}\right)}$$

$$= \frac{-2(3-u_n)+6}{3(3-u_n)-6} = \frac{2u_n}{3-3u_n} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n}{1-u_n} = \frac{2}{3}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

3.(c) $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{-2}{3}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n \times v_0 = \boxed{-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \iff (1-u_n).v_n = u_n$$

$$\iff v_n = u_n \times (1+v_n)$$

$$\iff u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}}$

3.(d) Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$: $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{0}{1-0} = 1$ ie $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

EXERCICE 3

1.(a) $E(0) = \boxed{I_p}$

1.(b) Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

$$E(s) \times E(t) = \left(I_p + s.A + \frac{s^2}{2}.A^2\right) \times \left(I_p + t.A + \frac{t^2}{2}.A^2\right)$$
$$= I_p + (s+t).A + \underbrace{\left(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + st\right)}_{= \frac{(s+t)^2}{2}}.A^2 + \underbrace{\left(\frac{st^2}{2} + \frac{s^2t}{2}\right).A^3 + \frac{s^2t^2}{4}.A^4}_{= O_3 \text{ car } A^3 = A^4 = O_3}$$

donc $E(s) \times E(t) = I_p + (s+t).A + \frac{(s+t)^2}{2}.A^2 = \boxed{E(s+t)}$

1.(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ le prédicat :

"$E(t)^n = E(nt)$"

Pour $n=0$: $P(0)$ est vrai car $E(t)^0 = I_p = E(0)$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(n)$ est vrai.

On a donc $E(t)^n = E(nt)$

Donc $E(t)^{n+1} = E(t) \times E(t)^n = E(t) \times E(nt)$

$$\underset{1.(b)}{=} E(t+nt) = E((n+1)t)$$

Donc $P(n+1)$ est vrai.

Ainsi, par récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, E(t)^n = E(nt)}$

1.(d) On a en utilisant 1.(b), pour $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) \times E(-t) = E(t-t) = E(0) = I_p$$

donc la matrice $\boxed{E(t) \text{ est inversible}}$ et $\boxed{E(t)^{-1} = E(-t)}$

1.(e) Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E(s) = E(t)$.

On a donc $I_p + s.A + \frac{s^2}{2}.A^2 = I_p + t.A + \frac{t^2}{2}.A$

En multipliant par A et en tenant compte du fait que $A^3 = O_p$ on a : $A + s.A^2 = A + t.A^2$

donc : $s.A^2 = t.A^2$

Comme $A^2 \neq O_3$: $s = t$.

Donc $\boxed{E \text{ est injective de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

1.(f) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3$ et $A^3 = O_3$.

Donc A est nilpotente d'indice 3.

Pour $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = I_p + t.A + \frac{t^2}{2}.A^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2+t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2.(a) P est une matrice carrée d'ordre 2.

$\det(P) = 3 - 2 = 1 \neq 0$ donc $\boxed{\text{P est inversible}}$

Et $P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$

2.(b) $P^{-1}.A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}.A.P = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D}$

2(c) Par récurrence on vérifie que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2.(d) Par une autre preuve par récurrence :

$$A = P.D.P^{-1}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P.D^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n & 2 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix}.P^{-1}$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 3\times 2^n - 2 & -6\times 2^n + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}}$$

2.(c).i. $M.D = M.M^2 = M^3 = M^2 M = \boxed{DM}$

Comme $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on la note $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Alors $MD = DM \iff \begin{pmatrix} 2x & y \\ 2z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2y = y \\ 2z = z \end{cases} \iff y = z = 0$

$\iff$ $\boxed{M \text{ est diagonale}}$

Alors $M^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{x = \pm\sqrt{2} \text{ et } t = \pm 1}$

2.(d).ii. Si $M = P^{-1}XP$ alors $M^2 = P^{-1}X^2P$

Donc : $X^2 = A \iff P^{-1}X^2P = P^{-1}AP$

$\iff M^2 = D$

$\iff M = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

$\iff X = P \times \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \times P^{-1}$

L'équation a donc $\boxed{4 \text{ solutions}}$.

3. (a) $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} . A^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} . \begin{pmatrix} 3.2^k - 2 & 6.(1-2^k) \\ 2^k - 1 & 3 - 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(3.2^k - 2) & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(3.2^k - 2)}$

et de même $\boxed{b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{6.t^k}{k!}(1-2^k)}$

$$\boxed{c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.(2^k - 1)}$$

$$\boxed{d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(3-2^{k+1})}$$

3. (b) On a par linéarité du symbole Σ :

$$a_n(t) = 3.\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k 2^k}{k!} - 2.\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

donc $d_n(t) = 3.\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2.\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$

On utilise le résultat donné dans l'énoncé pour e^t et pour e^{2t} : $\boxed{a(t) = 3.e^{2t} - 2.e^t}$

De même on trouve $\boxed{b(t) = 6(e^t - e^{2t})}$

$\boxed{c(t) = e^{2t} - e^t}$ et $\boxed{d(t) = 3e^t - 2e^{2t}}$

3.(c) On a donc pour tout réel t :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & 6e^t - 6e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}.\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{= \boxed{Q}} + e^t.\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{= \boxed{R}}$$

3.(d) $Q^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{Q^2 = Q}$ et $\boxed{R^2 = R}$

$QR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $RQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{QR = RQ = O_2}$

3. (e) Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} E(s) \times E(t) &= \left(e^{2s}.Q + e^{s}.R\right) \times \left(e^{2t}.Q + e^{t}.R\right) \\ &= e^{2(s+t)}.Q^2 + e^{2s+t}.QR + e^{s+2t}.RQ + e^{s+t}.R^2 \\ &= e^{2(s+t)}.Q + e^{s+t}.R \end{aligned}$$

et donc $\boxed{E(s) \times E(t) = E(s+t)}$

EXERCICE 4

1. $$3\sin x = 3\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)$$
$$= 3x \times \left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right]$$

on cherche le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{2+\cos x}$.

$$\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+\frac{\cos x - 1}{3}}$$

or $$\frac{\cos x - 1}{3} = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

et $$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

Ici $t \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{6}$ donc:

$$\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$$
$$= \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$$

Finalement par produit:

$$\frac{3\sin x}{2+\cos x} = x \times \left[\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right]$$
$$= x \times \left[1 - \frac{x^4}{180} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right] = \boxed{x - \frac{x^5}{180} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{3}\left(8\sin\frac{x}{2} - \sin x\right)$$

$$\sin x = \quad - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

et $\frac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$f_2(x) = \frac{1}{3}\left[8\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\right]$$

$$= \boxed{x - \frac{x^5}{480} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)}$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \times \tan x} = \sqrt[3]{\frac{\sin^3 x}{\cos x}} = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$$

$$\sin x = x\left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

et $$\frac{1}{\sqrt[3]{1+t}} = (1+t)^{-1/3} = 1 - \frac{t}{3} + \frac{2t^2}{9} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

Ici $t \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} = 1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) + \frac{2}{9}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$f_3(x) = x\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right]\times\left[1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right]$$

$$= x\times\left[1+\frac{x^4}{45}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right] = \boxed{x+\frac{x^5}{45}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{3}\left(2\sin x+\tan x\right) = \frac{1}{3\cos x}\left(2\sin x\times\cos x+\sin x\right)$$

$$= \frac{1}{3\cos x}\left(\sin(2x)+\sin x\right)$$

$$\sin x = x\left[1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right]$$

donc $\sin(2x)+\sin x = x\left[1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)+-\frac{(2x)^2}{6}+\frac{(2x)^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right]$

$$= x\left[3-\frac{x^2}{2}+\frac{11x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right]$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

et $\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\underset{t\to 0}{o}(t^2)$

Ici $t \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc :

$$\frac{1}{\cos x} = 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

donc $f_4(x) = \frac{x}{3}\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\times\left(3-\frac{x^2}{2}+\frac{11x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$

$$= \frac{x}{3}\times\left(3+\frac{x^4}{20}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) = \boxed{x+\frac{x^5}{40}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)}$$

2. On a :

$$\frac{f_1(x)-x}{x^5}\xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{180}$$

$$\frac{f_2(x)-x}{x^5}\xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{480}$$

$$\frac{x-x}{x^5}=0\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

$$\frac{f_3(x)-x}{x^5}\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{45}$$

$$\frac{f_4(x)-x}{x^5}\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{40}$$

Comme $-\frac{1}{180} < -\frac{1}{480} < 0 < \frac{1}{45} < \frac{1}{40}$

On a au voisinage de 0^+ :

$$\frac{f_1(x)-x}{x^5} < \frac{f_2(x)-x}{x^5} < \frac{x-x}{x^5} < \frac{f_3(x)-x}{x^5} < \frac{f_4(x)-x}{x^5}$$

Or $x^5>0$ au vois de 0^+ donc :

$$f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$$