PROBLEME Partie I

1.(a) $x \in D \iff 1+x>0$ et $x \neq 0$

donc $\boxed{D =]-1,0[\cup]0,+\infty[}$

1.(b) $x \longmapsto 1+x$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. Elle est donc C^1 sur D et est alors à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\ln$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition, $x \longmapsto \ln(1+x)$ est C^1 sur D.

Donc f est C^1 sur D comme quotient de fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.

2.(a) $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$

2.(b) On a donc $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$

et donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$

3.(a) Pour $x \in D$: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \boxed{\dfrac{x - (1+x)\times\ln(1+x)}{x^2(1+x)}}$

3.(b) Comme $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ ②

On a $x - (1+x)\ln(1+x) = x - (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

$$= x - x - x^2 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Et $x^2(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}$.

Donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$.

Comme f est C^1 sur $D = D' \setminus \{0\}$ et continue sur D'

on peut utiliser le théorème du prolongement du caractère C^1.

$\boxed{f \text{ est donc } C^1 \text{ sur } D' \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}}$

4. k est dérivable sur D' d'après les théorèmes généraux.

$\forall x \in D'$, $k'(x) = 1 - \frac{1+x}{1+x} - \ln(1+x) = -\ln(1+x)$

donc $k'(x)$ est du signe de $-x$

x	-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
k		$\nearrow$	0	$\searrow$	

On a donc : $\forall x \in D'$, $k(x) \leq 0$

Donc $\forall x \in D'$, $f'(x) \leq 0$.

x	-1	0	$+\infty$
f	$+\infty$	1	0

Par quotient de limites : $f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} +\infty$

Par croissances comparées $\dfrac{\ln t}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Et $1+x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ on a $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Partie II

5. f est continue sur $D' =]-1, +\infty[$ donc sur le segment $[0,1]$. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ est bien définie.

6. Soit $t \in [0,1]$.

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$$

or $t \neq -1$ donc $-t \neq 1$.

Donc $1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \dfrac{1-(-t)^{n-1+1}}{1-(-t)} = \boxed{\dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}}$

7. Pour $x \in [0,1]$ on intègre cette égalité pour t variant de 0 à x :

$$\int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1}\right) dt = \int_0^x \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}\, dt$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n\right]_0^x = \int_0^x \frac{dt}{1+t} - \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt$$

Donc :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \left[\ln(1+t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt$$

Donc : $\boxed{P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt}$

8. Pour $t \in [0,x]$ on a $\left|\dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}\right| = \dfrac{t^n}{1+t}$ car $t \geq 0$

D'autre part $0 \leq t^n$ car $0 \leq t$

et $0 \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$ car $t \geq 0$

Par produit d'inégalités :

$$\forall t\in[0,x],\ \left|\frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right| \leqslant t^n$$

On a donc :

$$|R_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right| dt \leqslant \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ie $\boxed{|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}}$

9. Pour $0 < x \leqslant 1$:

$$Q_n'(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \boxed{\frac{P_n(x)}{x}}$$

10.(a) g_n est continue sur $]0,1]$ comme somme et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a $\frac{P_n(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

car $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Donc $g_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Comme $g_n(0) = 0$: g_n est continue en 0.

Donc $\boxed{g_n \text{ est continue sur } [0,1]}$.

10.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$Q_n(1) = Q_n(1) - Q_n(0) = \int_0^1 Q_n'(x)\,dx$$

et $L = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

donc $$Q_n(1) - L = \int_0^1 \left(Q_n'(x) - \frac{\ln(1+x)}{x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 g_n(x)\,dx$$

Alors $$|Q_n(1) - L| = \left|\int_0^1 g_n(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,dx$$

Mais si $0 < x \leq 1$: $g_n(x) = -\frac{1}{x} R_n(x)$

donc $|g_n(x)| \leq \frac{x^n}{n+1}$ et c'est vrai aussi si $x = 0$

et donc $$\int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ainsi : $$\boxed{|Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}}$$

10.(c) Par encadrement : $\boxed{Q_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L}$

11.

```
n = 1
Q = 1
while 1/(n+1)**2 > 10^(-4):
    Q = Q + (-1)**(n-1)/n**2
    n = n+1
print(Q)
```

Partie III

12. f est C^∞ sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas.

13. Pour $x>0$:

$$f''(x) = \frac{\left[1 - 1 - \ln(1+x)\right] \times x^2(1+x) - \left[x - (1+x)\ln(1+x)\right] \times x(2+3x)}{x^4(1+x)^2}$$

$$\boxed{f''(x) = -\frac{2+3x}{x^2(1+x)^2} + 2\frac{\ln(1+x)}{x^3}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat :

"$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + (-1)^n \times n! \times \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$"

Pour $n = 1$:

$$\forall x > 0, \quad \frac{T_1(x)}{(1+x)x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{(1+x)x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = f'(x)$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel H_n est vraie.

On a donc :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + (-1)^n n! \times \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$

Alors :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n)}(x)\right)$$

Donc :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{T_n'(x) \times (1+x)^n x^n - T_n(x) n \left[(1+x)^{n-1} x^n + (1+x)^n x^{n-1}\right]}{(1+x)^{2n} x^{2n}}$$

$$+ (-1)^n n! \; \frac{\dfrac{x^{n+1}}{1+x} - (n+1) x^n \ln(1+x)}{x^{2n+2}}$$

Donc :

$$\forall x>0,\ f^{(n+1)}(x)=\frac{x(1+x)T_n'(x)-n(1+2x)T_n(x)+(-1)^n n!(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}}$$
$$+(-1)^{n+1}\times(n+1)!\times\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$$

ie :

$$\forall x>0,\ f^{(n+1)}(x)=\frac{T_{n+1}(x)}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}}+(-1)^{n+1}(n+1)!\times\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$$

Donc H_n est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

15. (a) Pour tout $x>0$: $f(x)=\underbrace{\ln(1+x)}_{a(x)}\times\underbrace{\frac{1}{x}}_{b(x)}$

or $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ a^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

et $\forall k\in\mathbb{N},\ b^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}$

D'après la formule de Leibniz on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\forall x>0,\ f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(k)}(x)\times b^{(n-k)}(x)$$
$$=\ln(1+x)\times(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\times(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}$$

Donc :

$$\forall x>0,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}} + (-1)^{n-1} n! \times \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(1+x)^{n-k} x^{k-1}}{k}\right] \times \frac{1}{(1+x)^n x^n}$$

Et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x>0,\ T_n(x) = (-1)^{n-1} \times n! \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+x)^{n-k} x^{k-1}}{k}$$

Le polynôme $T_n - (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+X)^{n-k} X^{k-1}}{k}$

a une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul.

Ainsi : $\boxed{T_n(X) = (-1)^{n-1} \times n! \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+X)^{n-k} X^{k-1}}{k}}$

15.(b) On a donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \deg(T_n) = n-1 \\ \mathrm{cd}(T_n) = (-1)^{n-1} \times n! \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{array}}$$

PROBLEME

Préliminaires

1. Si $\forall x \in [-1,1]$, $P(x) = Q(x)$ alors le polynôme $P-Q$ a une infinité de racines.
Par théorème : $P - Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Donc $\boxed{P = Q}$.

2. Si f est continue sur le segment $[-1,1]$ on sait d'après le théorème des bornes atteintes qu'elle a un maximum et un minimum sur $[-1,1]$.
On applique ce résultat à la fonction $|f|$.

Donc $\boxed{\|f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)| \text{ est bien défini}}$.

Partie I

3. $\forall x \in [-1,1]$, $T_0(x) = \cos(0) = \boxed{1}$

$T_1(x) = \cos(\arccos x) = \boxed{x}$

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$.

On a $T_{n+2}(x) + T_n(x) = \cos\left((n+2)\arccos x\right) + \cos\left(n \arccos x\right)$

Or $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Donc $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2\cos\left(\frac{2n+2}{2}\arccos x\right) \times \cos\left(\frac{2\arccos x}{2}\right)$

$$= 2\cos\left((n+1)\arccos x\right) \times x$$

$$= 2x \,.\, T_{n+1}(x)$$

Donc $\boxed{\forall x \in [-1,1],\ T_{n+2}(x) = 2x\, T_{n+1}(x) - T_n(x)}$

5. Pour $x \in [-1,1]$, $T_2(x) = \boxed{2x^2 - 1}$

$T_3(x) = \boxed{4x^3 - 3x}$

6. On note H_n le prédicat "T_n est une fonction polynomiale"

C'est vrai pour $n=0$ et $n=1$.

D'après 4. on voit facilement que si H_n et H_{n+1} sont vrais pour un $n \in \mathbb{N}$, alors H_{n+2} est vrai.

7. $\boxed{\deg(T_0)=0}$ et $\boxed{cd(T_0)=1}$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons H_n le prédicat

$$\text{"}\deg(T_n)=n \text{ et } cd(T_n)=2^{n-1}\text{"}$$

H_0 et H_1 sont vrais

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel H_n et H_{n+1} sont vrais.

On a donc $T_n(X)=2^{n-1}.X^n+$ polynôme de deg $\leq n-1$

$T_{n+1}(X)=2^n.X^{n+1}+$ polynôme de deg $\leq n$

Alors $T_{n+2}(X)=2X.T_{n+1}(X)-T_n(X)$

$=2^{n+1}.X^{n+2}+$ polynôme de deg $\leq n+1$

donc $\deg(T_{n+2})=n+2$ et $cd(T_{n+2})=2^{n+1}$

Donc H_{n+2} est vrai.

Par récurrence à 2 pas, H_n est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \deg(T_n)=n \text{ et } cd(T_n)=2^{n-1}}$

8. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note H_n le prédicat :

$$\text{"}T_n(-X)=(-1)^n\times T_n(X)\text{"}$$

H_0 et H_1 sont vrais.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel H_n et H_{n+1} sont vrais.

On a donc $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

et $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} \cdot T_{n+1}(X) = -(-1)^n \cdot T_{n+1}(X)$

Alors $T_{n+2}(-X) = -2X \cdot T_{n+1}(-X) - T_n(-X)$

$$= 2(-1)^n X T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X)$$

$$= (-1)^n \times \left[2X T_{n+1}(X) - T_n(X) \right]$$

$$= (-1)^n \times T_{n+2}(X) = (-1)^{n+2} \cdot T_{n+2}(X)$$

Donc H_{n+2} est vrai.

Par récurrence à 2 pas, H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \text{ est pair si } n \text{ est pair et } T_n \text{ est impair si } n \text{ est impair}}$

<u>9.(a)</u> Soit $\theta \in [0, \pi]$. On pose $x \overset{\text{def}}{=} \cos\theta$.

Alors $x \in [-1, 1]$ donc $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

et donc $\boxed{T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)}$

<u>9.(b)</u> Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$T_n(x_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Donc $\boxed{x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \text{ sont racines de } T_n(X)}$

9.(c) Si $0 \leq k \leq n-1$

alors $0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \frac{2n-1}{2n}\pi < \pi$

Or cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc injective. On en déduit que les réels $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont racines de $T_n(X)$.

Comme $\deg(T_n) = n$, $T_n(X)$ ne peut avoir d'autre racine et donc $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont exactement les racines de T_n et ce sont des racines simples.

Donc $\boxed{T_n(X) \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbb{R}}$

9.(d) On a donc :

$$\boxed{T_n(X) = 2^{n-1} \times \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$$

9.(e) Si on évalue en 0 on a :

$$T_n(0) = 2^{n-1} \times (-1)^n \times \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

Mais $T_n(0) = T_n\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Donc $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}}$

10. $\|T_n\|_\infty = \max_{-1\leq x\leq 1} |T_n(x)| = \max_{-1\leq x\leq 1} |\cos(n \arccos x)|$

Il est clair que $\|T_n\|_\infty \leq 1$.

$T_n(1) = \cos(n \arccos 1) = \cos(n\times 0) = \cos(0) = 1$

donc $\|T_n\|_\infty \geq 1$.

Ainsi $\boxed{\|T_n\|_\infty = 1}$

11. Immédiat d'après 7.

12. Immédiat d'après 10.

13.(a) V_n et P sont unitaires donc ils ont le même terme dominant, à savoir X^n.

Donc $\boxed{\deg(V_n - P) \leq n-1}$

13.(b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$V_n(\alpha_k) = 2^{1-n} \cdot T_n(\alpha_k) = 2^{1-n} \times \cos(k\pi) = 2^{1-n} \times (-1)^k$$

$$= \begin{cases} 2^{1-n} & \text{si } k \text{ pair} \\ -2^{1-n} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

et $|P(\alpha_k)| < 2^{1-n}$ puisque $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$

donc $-2^{1-n} < P(\alpha_k) < 2^{1-n}$

Donc $\boxed{V_n(\alpha_k) - P(\alpha_k) \text{ est } > 0 \text{ si } k \text{ est pair et } < 0 \text{ si } k \text{ est impair}}$

13.(c) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $V_n - P$ change de signe sur l'intervalle $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$. Comme elle est continue (car polynomiale), le TVI donne qu'elle en un $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ (puisqu'elle ne s'annule pas aux bornes).

On a $\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n$

donc les réels $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ sont deux à deux distincts.

Cela donne n racines pour le polynôme $V_n - P$.

Comme $\deg(V_n - P) \leq n-1$ on a donc

$V_n - P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $\boxed{V_n(X) = P(X)}$

c'est absurde car $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}$ et $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$.

On conclut que :

$\boxed{\text{pour tout } P(X) \text{ unitaire de degré } n, \text{ on a } \|P\|_\infty \geq 2^{1-n}}$

Partie II

12.(a) $q(t) = f(t) - P(t) - \lambda S(t)$.

Les racines de $S(X)$ sont $a_1, \dots, a_n$ et $t \notin \{a_1, \dots, a_n\}$

donc $S(t) \neq 0$. On peut donc poser $\lambda = \dfrac{f(t) - P(t)}{S(t)}$

et on a $q(t) = 0$

12.(b) Pour $i \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$\varphi(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - \alpha S(a_i) = 0 - \alpha \times 0 = 0$$

Et par choix de α : $\varphi(t) = 0$

Comme les réels $a_1, \dots, a_n, t$ sont deux à deux distincts on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ s'annule au moins } n+1 \text{ fois sur } [-1,1]}$.

12.(c)

On note $-1 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_n \leq 1$ les $n+1$ points ordonnés où φ s'annule.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, φ est C^n sur $[-1,1]$ d'après les th généraux

donc φ est continue sur $[b_k, b_{k+1}]$

et dérivable sur $]b_k, b_{k+1}[$

donc d'après le th de Rolle :

$$\exists c_k \in]b_k, b_{k+1}[\, ; \; \varphi'(c_k) = 0$$

Donc φ' s'annule en $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$.

Ces réels sont distincts car :

$$b_0 < c_0 < b_1 < c_1 < b_2 < \dots < b_{n-1} < c_{n-1} < b_n$$

Donc φ' s'annule n fois sur $[-1,1]$.

De même on montre que φ'' s'annule $(n-1)$ fois sur $[-1,1]$.

Puis que $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\varphi^{(j)}$ s'annule $n+1-j$ fois sur $[-1,1]$ et donc :

$$\boxed{\varphi^{(n)} \text{ s'annule au moins une fois sur } [-1,1].}$$

12. (d) On a :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x) - \lambda . S^{(n)}(x)$$

Mais $\deg P \leq n-1$ donc $P^{(n)} = 0$

et $\deg S = n$ donc $S^{(n)} = n! \, \mathrm{cd}(S) = n!$

On a donc $\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n! \times \lambda}$

12.(e) D'après (c) :

$$\exists a \in [-1,1] ; \ \varphi^{(n)}(a) = 0$$

Or $\varphi^{(n)}(a) = 0 \iff f^{(n)}(a) = n! \times \lambda$

$$\iff f^{(n)}(a) = n! \times \frac{f(t) - P(t)}{S(t)}$$

$$\iff f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times S(t)$$

Donc $\boxed{\exists a \in [-1,1] ; \ f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times S(t)}$

13. Si $t \in \{a_1, \dots, a_n\}$ l'inégalité à prouver est

$0 \leq 0$.

Si $t \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ l'inégalité à prouver est une conséquence immédiate de 12.(d)

Donc $\boxed{\forall t \in [-1,1], \ |f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |S(t)|}$

14. D'après la partie I. la quantité $\|S\|_\infty$ est minimale en choisissant :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

Et on a alors $\|S\|_\infty = 2^{1-n}$

$$\text{ie} \quad \forall t \in [-1, 1], \quad |S(t)| \leq 2^{1-n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

On a alors $\forall t \in [-1, 1], \quad |f(t) - P(t)| \leq \dfrac{M_n}{2^{n-1} \times n!}$

Et comme le membre de droite ne dépend pas de t

on a : $\boxed{\|f - P\|_\infty \leq \dfrac{M_n}{n! \times 2^{n-1}}}$