Exercice 1

1. Pour $n \geqslant 3$:

B_n = "on obtient la configuration PPF aux lancers $n-2$, $n-1$ et n" (mais peut-être pas pour la 1ère fois)

U_n = "au cours des n premiers lancers on a obtenu au moins une fois la séquence PPF"

2. Pour tout $n \geqslant 3$ on a :

$$U_{n+1} = \bigcup_{i=3}^{n+1} B_i = U_n \cup B_{n+1}$$

donc $U_n \subseteq U_{n+1}$

Par croissance de $\mathbb{P}$: $\forall n \geqslant 3,\ u_n \leqslant u_{n+1}$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.

Comme $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$: $\forall n \geqslant 3,\ u_n \leqslant 1$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est majorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente.

3. Comme les lancers sont effectués de manières indépendantes on peut dire que pour tout $n \geq 3$, les événements (P_{n-2}, P_{n-1}, F_n) sont mutuellement indépendants.

Donc : $\forall n \geq 3$, $\mathbb{P}(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) = \mathbb{P}(P_{n-2}) \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(F_n)$
$= \boxed{\dfrac{1}{8}}$

4. Pour tout $n \geq 3$:

$B_n \cap B_{n+1} \subseteq F_n \cap P_n = \emptyset$

$B_n \cap B_{n+2} \subseteq F_n \cap P_n = \emptyset$

$B_{n+1} \cap B_{n+2} \subseteq F_{n+1} \cap P_{n+1} = \emptyset$

Donc pour tout $n \geq 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

Mais pour $n \geq 3$:

$$B_n \cap B_{n+3} = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3} \neq \emptyset$$

Donc B_n et B_{n+3} ne sont pas incompatibles.

5. $U_3 = B_3$

Donc $u_3 = \mathbb{P}(B_3) = \boxed{\frac{1}{8}}$

$U_4 = B_3 \cup B_4$

Comme B_3 et B_4 sont incompatibles :

$u_4 = \mathbb{P}(U_4) = \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$

$U_5 = B_3 \cup B_4 \cup B_5$

Comme B_3, B_4 et B_5 sont 2 à 2 incompatibles :

$u_5 = \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) + \mathbb{P}(B_5) = \boxed{\frac{3}{8}}$

6. Soit $n \geqslant 5$.

6.(a) $U_n \cap B_{n+1} = \left(\bigcup_{i=3}^{n} B_i \right) \cap B_{n+1} = \bigcup_{i=3}^{n} (B_i \cap B_{n+1})$

Mais $B_{n-1} \cap B_{n+1} = B_n \cap B_{n+1} = \emptyset$

Donc $U_n \cap B_{n+1} = \left(\bigcup_{i=3}^{n-2} (B_i \cap B_{n+1}) \right) \cup \emptyset \cup \emptyset$

Donc $U_n \cap B_{n+1} = \bigcup_{i=3}^{n-2} (B_i \cap B_{n+1}) = \left(\bigcup_{i=3}^{n-2} B_i \right) \cap B_{n+1}$

Donc $\boxed{U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}}$

U_{n-2} est formé des évènements $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$

B_{n+1} est formé des évènements P_n, P_{n+1}, P_{n+2}

Comme les évènements $P_1, P_2, \dots, P_{n+2}$ sont mutuellement indépendants, le lemme des coalitions nous apprend que U_{n-2} et B_{n+1} sont indépendants.

Donc $\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_{n-2}) \times \mathbb{P}(B_{n+1})$

$$= \boxed{\frac{1}{8} u_{n-2}}$$

6.(b) $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$

Donc $\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$

ie $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2}$

donc $\boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})}$

6.(c) On note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est à valeurs dans $[0,1]$ on a $l \in [0,1]$.

De plus $\forall n \geqslant 5$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$

Donc lorsque $n \to +\infty$: $l = l + \frac{1}{8}(1-l)$

Donc $\boxed{l = 1}$.

Au bout d'un grand nombre de lancers, on a de très fortes chances d'obtenir la séquence PPF au moins une fois.

7.(a) $G_3 = P_1 \cap P_2 \cap F_3 = B_3$

car : J gagne au 3ème tour ssi les 3 premiers lancers donnent la séquence PPF.

Donc $q_3 = \mathbb{P}(G_3) = \mathbb{P}(B_3) = \boxed{\frac{1}{8}}$

De même : J gagne au 4ème tour ssi les 4 premiers lancers donne la séquence PPPF
(FPPF fait gagner J au 3ème tour)

Donc $G_4 = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4$ donc $q_4 = \boxed{\frac{1}{16}}$

Le raisonnement est le même dans le cas général.
Pour $n \geq 3$:

J gagne au lancer n <u>ssi</u> les n premiers lancers ont donné la séquence PP...PPPF
En effet on doit avoir la séquence PPF aux lancers $n-2$, $n-1$ et n. Si jamais on obtenait un F avant ce serait J' qui gagnerait.

Donc $\forall n \geq 3$, $G_n = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n$

Donc $\forall n \geq 3$, $q_n = \boxed{\dfrac{1}{2^n}}$

<u>7.(b)</u> L'"événement "J est déclaré vainqueur avant le lancer de rang $n+1$" est $\bigcup_{i=3}^{n} G_i$

Donc $\forall n \geq 3$, $h_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^{n} G_i\right)$

Or les événements $G_3, G_4, \ldots, G_n$ sont 2 à 2 incompatibles (puisque J ne gagne qu'une fois).

Donc :

$$\forall n \geq 3, \quad h_n = \sum_{i=3}^{n} \mathbb{P}(G_i) = \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{2^i}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right)}$$

7.(c) $h_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{4}$

Au bout d'un grand nombre de lancers le joueur J n'a environ qu'une chance sur 4 de gagner.

8.(a)

x	0	1	2	2	2	3
y	0	0	0	0	0	1
k	0	1	2	3	4	5
r		1	1	1	1	0

x	0	1	0	1	0	0	0	1	2
y	0	0	1	2	1	1	1	2	3
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r		1	0	1	0	0	0	1	1

x	0	0	1	0	1	0	1	2
y	0	1	2	1	2	1	2	3
k	0	1	2	3	4	5	6	7
r		0	1	0	1	0	1	1

8.(b) k représente le nombre de tours avant qu'un des deux joueurs ne gagnent la partie.

```
⋮
if x==3:
    print('J gagne en '+str(k)+' tours.')
else:
    print("J' gagne en "+str(k)+' tours.')
```

Pour le premier exemple :

J gagne en 5 tours.

Pour le second exemple :

J' gagne en 8 tours.

Pour le troisième exemple :

J' gagne en 7 tours.

EXERCICE 2

1. La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car composée de deux fonctions continues.

D'après le théorème fondamental de l'analyse F est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F'(x) = e^{-x^2}}$

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F'(x) > 0$.

Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3.(a) Si $x \geq 1$ alors $x^2 \geq x$

donc $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

3.(b) On a donc pour $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt$$

or $\forall t \in [1, x],\ e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leqslant \int_1^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_1^x = e^{-1} - e^{-x}$$

Donc :

$$\forall x \geq 1, \quad F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1} - e^{-x}$$

$$\text{donc } F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \frac{1}{e}$$

Donc F est majorée sur $[1, +\infty[$.

Sur le segment $[0,1]$, F est continue donc elle est aussi majorée sur $[0,1]$ d'après le théorème des bornes atteintes.

Et donc <u>F est majorée sur $\mathbb{R}^+$</u>.

Comme elle aussi croissante sur $\mathbb{R}^+$ on sait qu'<u>elle a une limite finie en $+\infty$</u>, d'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions numériques.

4. La fonction $\varphi : u \mapsto \ln(1+u) - u$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$

et $\forall u > -1, \quad \varphi'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = -\frac{u}{1+u}$

u	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(u)$		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc $\forall u > -1$, $\varphi(u) \leqslant 0$

i.e. $\boxed{\forall u > -1, \quad \ln(1+u) \leqslant u}$

5. (a) Si $t \in [0, \sqrt{n}[$: $\quad -\frac{t^2}{n} \in]-1, 0]$

donc $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$

donc $n \times \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -t^2$

Par croissance de l'exponentielle :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$$

Et cette inégalité est trivialement vraie si $t = \sqrt{n}$.

Donc $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$

Par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt}$$

5.(b) On pose $t = \sqrt{n}\cos(u) = \varphi(u)$

t	u
0	$\pi/2$
$\sqrt{n}$	0

φ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc le changement de variable est licite.

$dt = -\sqrt{n}\sin(u)\,du$

Donc :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\pi/2}^0 \left(1 - \cos^2 u\right)^n \times (-\sqrt{n}) \sin(u)\,du$$

$$= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,du = \sqrt{n} \times W_{2n+1}$$

Ainsi $\boxed{\sqrt{n} \times W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt}$

6.(a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

Alors $\frac{t^2}{n} \in \mathbb{R}^+$ donc $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$

donc $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{t^2}$

Par passage à l'inverse :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}}$$

6.(b) On pose $t = \sqrt{n} \times \tan(u) = \varphi(u)$.

t	u
0	0
$\sqrt{n}$	$\pi/4$

φ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc le changement de variable est licite.

$$dt = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(u)} du$$

Donc :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2(u)\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(u)} du$$

$$= \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{-2n}(u)} \times \frac{1}{\cos^2(u)} du$$

$$= \boxed{\sqrt{n} \times \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(u) du}$$

6.(c) On pose $u = \frac{\pi}{2} - t$ changement de variable affine.

Alors :

$$\int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(u) du = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \cos^{2n-2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \times (-dt) = \boxed{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt}$$

6. (d) Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \times \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t)\,dt$$

Or $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t)\,dt - \int_0^{\pi/4} \sin^{2n-2}(t)\,dt$$

or $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin^{2n-2}(t)\,dt$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^{2n-2}(t)\,dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale

On a donc : $$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \leqslant \sqrt{n} \times \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t)\,dt$$

ie : $$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \leqslant \sqrt{n} \times W_{2n-2}}$$

7. On a $\sqrt{n}\, W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

donc $\sqrt{2n+1}\, W_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\sqrt{2n-2}\, W_{2n-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

donc $\sqrt{n}\, W_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sqrt{n}\, W_{2n-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Or : $\forall n \geq 1,\quad \sqrt{n}\, W_{2n+1} \leq \Gamma(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}\, W_{2n-2}$

Par prolongement des inégalités lorsque $n \to +\infty$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

EXERCICE 3

1. * Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $\deg(P) \leq 2$

Or $\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right) = \deg(P) \leq 2$

et $\deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \deg(P) \leq 2$

donc $\deg(f(P)) \leq \text{Max}(2;2) = 2$.

Donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

* Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$f(\lambda P + Q) = \frac{1}{2}\left(\lambda . P\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda . P\left(\frac{X+1}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

$$= \lambda . f(P) + f(Q)$$

Donc f est linéaire.

* $\boxed{f \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

2. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_2[X]^2$.

$$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda . P(1) + Q(1) = \lambda . \varphi(P) + \varphi(Q).$$

Donc $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})}$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \text{Ker}(f) \iff f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$\iff P\left(\frac{X}{2}\right) = - P\left(\frac{X+1}{2}\right)$$

On note :

$P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Alors :

$$P \in \text{Ker}(f) \iff \frac{a}{4}X^2 + \frac{b}{2}X + c = -\frac{a}{4}(X^2 + 2X + 1) - \frac{b}{2}(X+1) - c$$

$$\iff \begin{cases} \frac{a}{4} = -\frac{a}{4} \\ \frac{b}{2} = -\frac{2a}{4} - \frac{b}{2} \\ c = -c \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

Donc $\boxed{\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}}$

Donc f est injectif.

Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ on sait que f est bijectif.

Ainsi $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

4. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ noté $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Alors :

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff P(1) = 0 \iff a + b + c = 0$$

$$\iff \begin{cases} a, b \text{ qcq} \\ c = -a - b \end{cases}$$

$$\iff P = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^2 - 1, X - 1)$

Comme les polynômes $X^2 - 1$ et $X - 1$ sont non colinéaires, ils forment une famille libre, et donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

D'après le th du rang : $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$

$$= 3 - 2$$

donc $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = 1}$

5. φ n'est donc <u>pas injective</u>.

Or a $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$

et $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$

Donc $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est surjective de } \mathbb{R}_2[X] \text{ vers } \mathbb{R}}$.

6. On fixe $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat :

$$f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

Pour $n=1$: $\displaystyle \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$

$$= f(P)$$

donc H_1 est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel H_n est vrai :

On a alors :

$$f^{n+1}(P) = f(f^n(P)) = f\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) \text{ d'après } H_n$$

Comme f est linéaire :

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{\frac{X}{2}+k}{2^n}\right) + P\left(\frac{\frac{X+1}{2}+k}{2^n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+1+2k}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\times\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

On reconnaît :

$$\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right)$$

séparée en la somme où j est pair et celle où j est impair

Donc $f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right)$

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence on peut conclure que H_n est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

7. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$

or P est continue sur $[0,1]$ donc d'après le th de la valeur moyenne :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 P(t)\,dt$$

Or $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}P(1) - \frac{1}{n}P(0)$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 P(t)\,dt$$

Par suite extraite : $\boxed{\varphi(f^n(P)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 P(t)\,dt}$