Correction du DS8

Exercice 1

$v_1 \stackrel{\text{def}}{=} (1, 2, -1, 1)$ et $v_2 \stackrel{\text{def}}{=} (0, 3, 1, -1)$

$\mathbb{F} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vect}(v_1, v_2)$ Comme v_1 et v_2 non colinéaires: $\dim(\mathbb{F}) = 2$

On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $v_2 + \alpha v_1 \perp v_1$

ie $\langle v_2 + \alpha v_1, v_1 \rangle = 0$

ie $\langle v_2, v_1 \rangle + \alpha \langle v_1, v_1 \rangle = 0$

On a $4 + \alpha 7 = 0$ donc $\alpha = -\frac{4}{7}$.

Alors $v_2 + \alpha v_1 = (0, 3, 1, -1) - \frac{4}{7}(1, 2, -1, 1)$

$= \frac{1}{7}(-4, 13, 11, -11) \stackrel{\text{def}}{=} v_3$

On a $\mathbb{F} = \text{Vect}(v_1, v_3)$ et $v_1 \perp v_3$ par def de α.

$\|v_1\|^2 = 7$ et $\|v_3\|^2 = \frac{1}{49} 427 = \frac{61}{7}$

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{7}} v_1, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{61}} v_3\right)$ est orthonormée. Comme $\dim(\mathbb{F}) = 2$, elle est une base orthonormée de $\mathbb{F}$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Alors : $(x, y, z, t) \in \mathbb{F}^{\perp} \iff \begin{cases} \langle (x,y,z,t), v_1 \rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,t), v_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 3y + z - t = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathbb{F}^{\perp} = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; \; x + 2y - z + t = 3y + z - t = 0 \}$

Exercice 2

1. D'après le cours : la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

2.(a) On a :

$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_{p+1} - S_p = \frac{1}{n+p+1} \geq 0$

Donc la suite $(S_p)_{p \geq 0}$ est croissante.

De plus $\frac{1}{n+p} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p}$ et la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p}$ diverge

(série de Riemann avec $\alpha = 1$) donc par comparaison

de séries à termes positifs la série $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{n+p}$ diverge.

Donc la suite des sommes partielles $(S_p)_{p \geq 1}$

est divergente.

2.(b) Comme la suite $(S_p)_{p \geq 1}$ est croissante et divergente

on a $S_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$.

Et donc $\exists p \in \mathbb{N}$; $S_p > 1$ ie $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} > 1$

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n + p_n \geq n$

donc par minoration : $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Donc la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ n'est pas convergente.

4. Soit $n \geq 2$.

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ on a $n+k > n$ donc $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$

et pour $k = 0$: $n + k = n$ donc $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}$

Par somme d'inégalités :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < 1}$

Pour $n \geq 2$ on note H_n le prédicat : " $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$ "

Initialisation : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60} > 1$

donc H_2 est vrai.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tq H_n est vrai.

On a donc : $$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$

De plus $$\sum_{k=0}^{2(n+1)-2} \frac{1}{n+1+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2}\right)}_{>1} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n}$$

et $$\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} = \frac{6n}{9n^2-1} - \frac{2}{3n} = 6n \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{9n^2-1} - \frac{1}{9n^2}\right)}_{\geq 0}$$

Donc $$\sum_{k=0}^{2(n+1)-2} \frac{1}{n+1+k} > 1$$

Donc H_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1}$$

5. Pour $n \geq 2$ on a donc : $S_{n-1} < 1 < S_{2n-2}$

comme (S_p) est croissante et par déf de p_n on en déduit

$$n-1 < p_n \leq 2n-2$$

donc $\forall n \geq 2$, $\quad 2n-1 \leq a_n \leq 3n-2$

$$\text{ie } 2-\frac{1}{n} \leq u_n \leq 3-\frac{2}{n}$$

Par prolongement des inégalités, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$

alors $\boxed{2 \leq l \leq 3}$

6. Soit $n \geq 1$.

Par def de a_n on a :

$$\boxed{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n} > 1}$$

Comme p_n est le plus petit entier p tel que $S_p > 1$

on a $S_{p_n-1} \leq 1$ puisque $p_n - 1 < p_n$.

Donc $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n-1} \leq 1$

ie $\boxed{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n-1}+\frac{1}{a_n} \leq 1+\frac{1}{a_n}}$

7. On a $1 \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n}$

donc $\boxed{1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

puisque $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

donc $\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$

ie $\boxed{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{dt}{t}}$

et $\sum_{k=n}^{a_n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$

ie $\boxed{\int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n - 1}}$

Or $\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$

donc $\boxed{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \leqslant 1}$

8. On a donc $1 - \frac{1}{n} \leq \ln(a_n) - \ln(n) \leq 1$

donc $1 - \frac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq 1$

Par encadrement : $\ln(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Par continuité de exp sur $\mathbb{R}$: $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e}$

Exercice 3

1. $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x,y,z,t) \longmapsto u(x,y,z,t)$

où $u(x,y,z,t) = \frac{1}{2}(x+y, -x-y, 3z+t, -z+t)$

Par définition $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$.

2.(a) On a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(2A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{3}$$

car le rang d'une matrice échelonnée par lignes est égal au nombre de lignes non nulles.

2.(b) $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\underset{C_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{C_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{C_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$X \in \mathrm{Im}(A) \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 ; \quad \alpha C_1 + \beta C_3 + \gamma C_4 = X$

$$\iff \begin{cases} \alpha = x \\ -\alpha = y \\ 3\beta + \gamma = z \\ -\beta + \gamma = t \end{cases} \quad \text{compatible}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \boxed{\alpha} & = x & \\ 0 & = x+y & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \boxed{3\beta}+\gamma & = z & \\ -\beta+\gamma & = t & \end{array}\right. \quad \text{est compatible}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \boxed{\alpha} & = x & \\ 0 & = x+y & \\ \boxed{3\beta}+\gamma & = z & \\ \boxed{4\gamma} & = t+3z & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \end{array}\right. \quad \text{est compatible}$$

$$\Longleftrightarrow x+y=0$$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \, ; \; x+y=0 \right\}}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \Longleftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x}+y = 0 \\ \cancel{-x-y = 0} \\ 3z+t = 0 \\ -z+t = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \boxed{x}+y = 0 & \\ \boxed{3z}+t = 0 & \\ \boxed{4t} = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ y \text{ qcq} \\ z = t = 0 \end{array}\right.$$

Donc $Ker(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

D_1

Comme $D_1 \neq O_{4,1}$ la famille (D_1) est une base de $Ker(A)$.

2.(c) $D_1 \in Im(A)$ donc $Ker(A) \subseteq Im(A)$

donc $Ker(A) \cap Im(A) \neq \{O_{4,1}\}$

$Ker(A)$ et $Im(A)$ ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

3.(a) Soit $X \in Ker(A - \lambda I_4)$.

Alors $(A - \lambda I_4)X = O_{4,1}$

donc $(A - \lambda I_4)^2 X = (A - \lambda I_4) \times O_{4,1} = O_{4,1}$

donc $X \in Ker((A - \lambda I_4)^2)$.

Ainsi $E_\lambda = Ker(A - \lambda I_4) \subseteq Ker((A - \lambda I_4)^2) = F_\lambda$.

3.(b) $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot (1-2\lambda) \begin{vmatrix} -1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-2\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2^4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-2\lambda \end{vmatrix}$$

en développant p/r à la 1ère ligne

$$\chi(\lambda) = -\frac{1}{16}(1-4\lambda^2) \cdot \begin{vmatrix} 3-2\lambda & 1 \\ -1 & 1-2\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 3-2\lambda & 1 \\ -1 & 1-2\lambda \end{vmatrix}$$ en développant p/r à la 1ère ligne

$$= \frac{1}{16}\left(1-(1-4\lambda^2)\right) \times \left[(3-2\lambda)(1-2\lambda)+1\right]$$

$$= \frac{1}{16} 4\lambda^2 \times \left(4\lambda^2 - 8\lambda + 4\right)$$

$$\boxed{\chi(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2}$$

<u>3.(c)</u> $E_\lambda \neq \{0_{4,1}\} \iff A - \lambda . I_4$ non injective

$\iff A - \lambda . I_4$ non inversible

$\iff \chi(\lambda) = 0$

$\iff \lambda \in \{0, 1\}$

<u>3.(d)</u> * Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $F_\lambda = \{0_{4,1}\}$

Comme $E_\lambda \subseteq F_\lambda$ on a $E_\lambda = \{0_{4,1}\}$ donc $\lambda \notin \{0, 1\}$

Par contraposée : $\lambda \in \{0, 1\} \implies F_\lambda \neq \{0_{4,1}\}$

* si $\lambda \notin \{0, 1\}$ alors $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_4) = E_\lambda = \{0_{4,1}\}$

donc $A - \lambda I_4$ est injective

donc $A - \lambda I_4$ est inversible

donc $\det(A - \lambda I_4) \neq 0$

Or $\det\left((A-\lambda I_4)^2\right) = \left(\det(A-\lambda I_4)\right)^2 \neq 0$

donc $(A-\lambda I_4)^2$ est inversible

donc $(A-\lambda I_4)^2$ est injective

donc $F_\lambda = \mathrm{Ker}\left((A-\lambda I_4)^2\right) = \{0_{4,1}\}$

* Conclusion: $\boxed{F_\lambda \neq \{0_{4,1}\} \iff \lambda \in \{0,1\}}$

4. * on choisit $\varepsilon_1 = (1,-1,0,0) \in \mathrm{Ker}(u)$

* $A - I_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A-I_4)\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc si on pose $\varepsilon_3 = (0,0,1,-1)$ alors $\varepsilon_3 \in \mathrm{Ker}(u-id)$

* $A\times\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc si on pose $\varepsilon_2 = (1,1,0,0)$

alors $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$

* $(A-I_4)\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc si on pose $\varepsilon_4 = (0,0,1,1)$

alors $(u-id)(\varepsilon_4) = (0,0,1,-1) = \varepsilon_3$

La famille $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ vérifie les conditions demandées.

Montrons qu'elle est une base de $\mathbb{R}^4$

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+0+0-0-(-1)-0) - (-1+0+0-0-1-0)$$

$$= 2-(-2) = 4 \neq 0$$

Donc $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

5. * $u^2(\varepsilon_2) = u(\varepsilon_1) = 0$ car $\varepsilon_1 \in \mathrm{Ker}(u)$

$u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$

donc $\varepsilon_2 \in \mathrm{Ker}(u^2)$.

* $(u-id)^2(\varepsilon_4) = (u-id)(\varepsilon_3) = 0$ car $\varepsilon_3 \in \mathrm{Ker}(u-id)$

$(u-id)(\varepsilon_4) = \varepsilon_3$

donc $\varepsilon_4 \in \mathrm{Ker}((u-id)^2)$

* $\varepsilon_1 \in \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u^2)$ d'après 3.(a)

donc $\underline{\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker}(u^2)}$

* $\varepsilon_3 \in \operatorname{Ker}(u-id)$ et $\operatorname{Ker}(u-id) \subseteq \operatorname{Ker}((u-id)^2)$ d'après 3.(a)

donc $\underline{\varepsilon_3 \in \operatorname{Ker}((u-id)^2)}$.

On a donc $\operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subseteq \operatorname{Ker}(u^2)$

$\operatorname{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4) \subseteq \operatorname{Ker}((u-id)^2)$

Comme $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \oplus \operatorname{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

$$\subseteq \operatorname{Ker}(u^2) + \operatorname{Ker}((u-id)^2) \subseteq \mathbb{R}^4$$

Donc $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}(u^2) + \operatorname{Ker}((u-id)^2)$

On $\operatorname{rg}(A^2) = 2$ (2 colonnes nulles et 2 colonnes non colinéaires)

donc d'après le théorème du rang : $\dim(\operatorname{Ker}(u^2)) = 4 - 2 = 2$

De même $\operatorname{rg}((A - I_4)^2) = 2$ donc $\dim(\operatorname{Ker}((u-id)^2)) = 2$

Ainsi on a aussi $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\operatorname{Ker}(u^2)) + \dim(\operatorname{Ker}((u-id)^2))$

Donc $\boxed{\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}(u^2) \oplus \operatorname{Ker}((u-id)^2)}$

6.(a) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$u(\varepsilon_1) = 0$ car $\varepsilon_1 \in \mathrm{Ker}(u)$

$u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$

$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$ car $\varepsilon_3 \in \mathrm{Ker}(u - id)$

$u(\varepsilon_4) = \varepsilon_4 + \varepsilon_3$ car $(u - id)(\varepsilon_4) = \varepsilon_3$

6.(b) $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On utilise la méthode du système linéaire :

$$\begin{cases} x + y = a \\ -x + y = b \\ z + t = c \\ -z + t = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{a-b}{2} \\ y = \dfrac{a+b}{2} \\ z = \dfrac{c-d}{2} \\ t = \dfrac{c+d}{2} \end{cases}$$

donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

8. D'après la formule de changement de base pour un endomorphisme :

$$A = PTP^{-1}$$

Donc par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & -1 & -n+1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+2 & n \\ 0 & 0 & -n & -n+2 \end{pmatrix}}$$