Correction du Khasse 2020

PROBLEME 1

1. On trouve $\boxed{A \times {}^tA = I_3}$

Donc A est inversible et $\boxed{A^{-1} = {}^tA}$

2. $\det(A) = \dfrac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \end{vmatrix}$ $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$= \dfrac{-\sqrt{2}}{8}\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{-\sqrt{2}}{8}\left(-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = \boxed{1}$

en développant p/r à la 2ième ligne

3. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f - id) \iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} \boxed{-x} - \sqrt{2}y + z = 0 \\ \sqrt{2}x - 2y - \sqrt{2}z = 0 \\ \cancel{x + \sqrt{2}y - z = 0} \end{cases}$ car $L_3 = -L_1$

$\iff \begin{cases} \boxed{-x} - \sqrt{2}y + z = 0 \\ \boxed{-4y} = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}L_1$

$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z \text{ qcq} \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f-id) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$.

On pose $\boxed{\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,1)}$

Alors $\|\overrightarrow{u_1}\| = 1$ et $\mathrm{Ker}(f-id) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1})$

4. On note $\mathcal{B}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1,0,1)$$

$$\det_{\mathcal{B}_{cano}} (\vec{j}, f(\vec{j}), \overrightarrow{u_1}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{1}$$

5. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Alors : $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f-id)^{\perp} \iff (x,y,z) \perp \overrightarrow{u_1}$

$$\iff x + z = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y \text{ qcq} \\ z \text{ qcq} \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f-id)^{\perp} = \mathrm{Vect}((-1,0,1), (0,1,0))$

Donc si on pose $\boxed{\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)}$ et $\boxed{\overrightarrow{u_3} = (0,1,0)}$

alors $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f-id)^{\perp}$

On note $\mathcal{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$.

On a $\det_{\mathcal{B}_{cano}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Donc <u>$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$</u>.

$f(\vec{u_1}) = \vec{u_1}$ car $\vec{u_1} \in \mathrm{Ker}(f - id)$

$A \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{u_2}) = -\vec{u_3}$

$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{u_3}) = \vec{u_2}$

Ainsi $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

<u>Partie II</u>

<u>6.</u> $O_2 \in E$ donc $E \neq \emptyset$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in E^2$.

Alors ${}^t(\lambda M + N) = \lambda . {}^tM + {}^tN = \lambda . M + N$

donc $\lambda . M + N \in E$.

Ceci prouve que $\boxed{E \text{ est un sev de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors :

$$M \in E \iff b = c \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Donc $E = \text{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=J_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=J_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=J_3} \Big)$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq $aJ_1 + bJ_2 + cJ_3 = O_2$

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $a = b = c = 0$.

Donc la famille (J_1, J_2, J_3) est libre. Elle est donc une base de E.

Donc $\dim(E) = \text{Card}(J_1, J_2, J_3) = \boxed{3}$

7. • Il est clair que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc φ est une forme.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ et $M'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & c'' \end{pmatrix}$

trois matrices de E.

• $\varphi(M', M) = a'a + 2b'b + c'c = aa' + 2bb' + cc' = \varphi(M, M')$

Donc φ est symétrique

• $\varphi(\lambda M + M', M'') = (a + \lambda a')a'' + 2(b + \lambda b')b'' + (c + \lambda c')c''$

$= aa'' + 2bb'' + cc'' + \lambda(a'a'' + 2b'b'' + c'c'')$

donc $\varphi(\lambda M+M', M'') = \lambda\varphi(M, M') + \varphi(M, M'')$

Donc φ est linéaire à gauche.

Comme elle est aussi symétrique : φ est bilinéaire.

- $\varphi(M, M) = a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 0$

  Donc φ est positive.

- $\varphi(M, M) = 0 \iff a^2 + 2b^2 + c^2 = 0$

  $\iff a^2 = 2b^2 = c^2 = 0$ car c'est une somme de réels positifs

  $\iff a = b = c = 0$

  $\iff M = O_2$

  Donc φ est une forme définie.

Ceci prouve que $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

8. On note $\mathcal{B} = (K_1, K_2, K_3)$.

- K_1, K_2, K_3 appartiennent à E
- on vérifie facilement que la famille (K_1, K_2, K_3) est orthonormée pour φ.

• Comme $\dim(E) = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$ on peut conclure que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base orthonormeé de } E}$.

Partie III

9. Il est clair que g est definie sur E et à valeurs dans E.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ deux matrices de E. On a :

$$g(\lambda M + M') = g\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda a + a' + \lambda c + c'}{2} - (\lambda b + b') & \frac{\lambda a + a' - (\lambda c + c')}{2} \\ \frac{\lambda a + a' - (\lambda c + c')}{2} & \frac{\lambda a + a' + \lambda c + c'}{2} + \lambda b + b' \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a'+c'}{2} - b' & \frac{a'-c'}{2} \\ \frac{a'-c'}{2} & \frac{a'+c'}{2} + b' \end{pmatrix}$$

$$= \lambda . g(M) + g(M')$$

Donc $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } E}$

10. $g(K_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}K_2$

$g(K_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}K_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}K_3$

$g(K_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}K_2$

Donc $\mathrm{Mat}(g ; \mathcal{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \boxed{A}$

11. On pose $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1 + K_3)$

$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-K_1 + K_3)$

$U_3 = K_2$

Alors $g(U_1) = U_1$

$g(U_2) = -U_3$

$g(U_3) = U_2$

On a vu que $\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3) \neq 0$ donc

$\mathcal{B}' = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de E.

$$\boxed{\mathrm{Mat}(g ; \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

12. Soit $M \in E$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Tr}(g(M)) = a + c = \mathrm{Tr}(M)$

donc g conserve la trace.

$\det(g(M)) = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}\left(a^2 + c^2 + 2ac - 4b^2 - a^2 + 2ac - c^2\right)$

$= ac - b^2 = \det(M)$

donc g conserve le déterminant.

PROBLEME 2

Partie I

13. $$\mu_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dt = \boxed{\pi}$$

$$\mu_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \, dt = \Big[\sin t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1 - (-1) = \boxed{2}$$

$$\mu_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geq 0$

donc $\cos^n(t) \geq 0$

Par positivité de l'intégrale : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \mu_n \geq 0}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) \, dt - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t) \, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t) \times (\cos t - 1) \, dt$$

or $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n(t) \times (\cos t - 1) \leq 0$

donc par positivité de l'intégrale : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

15. Soit $n \geq 1$. On a :

$$(n+1)\,u_{n+1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (n+1)\cos^{n+1}(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (n+1)\cos^{n-1}(t) \times (1 - \sin^2 t)\,dt$$

$$= (n+1)\,u_{n-1} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (n+1)\cos^{n-1}(t)\sin^2(t)\,dt$$

$$\overset{IPP}{=} (n+1)\,u_{n-1} - \left[-\frac{n+1}{n}\cos^n t \times \sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-(n+1)}{n}\cos^n t \times \cos t\,dt$$

$$= (n+1)\,u_{n-1} - 0 - \frac{n+1}{n}\,u_{n+1}$$

L'IPP est licite car les fonctions $t \mapsto \frac{-(n+1)}{n}\cos^n t$ et $t \mapsto \sin t$ sont C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc : $\boxed{(n+1)\,u_{n+1} = n\,u_{n-1}}$

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_n \quad = V_n$$

Donc $\boxed{(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$.

$$V_0 = u_1 u_0 = \boxed{2\pi}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = 2\pi}$

17. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ et $u_n \geq 0$

donc $u_{n+1}u_n \leq u_n^2$

donc $(n+1)u_{n+1}u_n = V_n \leq (n+1)u_n^2$

ie $2\pi \leq (n+1)u_n^2$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ et $u_{n+1} \geq 0$

donne $(n+1)u_{n+1}^2 \leq V_n = 2\pi$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad (n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2}$

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geq \frac{2\pi}{n+1}$ donc comme $u_n \geq 0$

on a $u_n \geq \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n u_n^2 = (n-1+1) u_{n-1+1}^2 \leq 2\pi$

puisque $n-1 \in \mathbb{N}$

donc $u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$

19. ~~Donc~~ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n} u_n}{\sqrt{2\pi}} \leq 1$

Or $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc par encadrement : $\frac{\sqrt{n} u_n}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}}$

Partie II

20. Si $x \neq 0$: $n^2 u_n |x|^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{3/2} |x|^n$

donc si $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$: $n^2 u_n |x|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

donc $u_n |x|^n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et c'est aussi vrai si $x = 0$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum u_n x^n$ converge absolument donc converge, pour tout $x \in]-1,1[$.

21. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k t \, dt \right) x^k$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (x \cos t)^k \right) dt$$

Mais pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $x\cos t \in [-x, x]$
donc $x \cos t \in]-1,1[$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{n-1} (x\cos t)^k = \frac{1-(x\cos t)^n}{1-x\cos t}$$

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{1-x\cos t} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{1-x\cos t} dt}$$

22. On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} S(x)$.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{1-x\cos t} dt \right| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \frac{\cos^n t}{1-x\cos t} \right| dt \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{|1-x\cos t|} \stackrel{\text{def}}{=} M$$

car $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\cos^n t| = |\cos t|^n \leqslant 1^n = 1$

Or $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ puisque $x \in]-1,1[$.

Donc $x^n \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{1-x\cos t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

car c'est le produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.

Donc par somme de limites :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{1-x\cos t} - 0$$

Par unicité de la limite :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{1-x\cos t}}$$

23. On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right) = \varphi(t)$

φ est C^1 sur $]-\pi,\pi[$ donc sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$du = \varphi'(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{t}{2}\right)dt$$

t	u
$-\pi/2$	-1
$\pi/2$	1

Donc :

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x)+(1+x)u^2}\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{(1-x)+(1+x)\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \times \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)+x.\left(\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)-1\right)}\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} + x\,\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+x\times\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1-x.\cos t}\,dt = \boxed{S(x)}$$

24. Soit $x \in]-1,1[$

$$S(x) = \frac{2}{1-x} \times \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}u^2}\,du = \frac{2}{1-x}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,u\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \boxed{\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$ car arctan impaire.

PROBLEME 3

Partie I

25. * Si $|x| \geq 1$, la suite nx^{n-1} diverge donc la série $\sum n x^{n-1}$ diverge grossièrement.

* Si $|x| < 1$ alors $n|x|^{n-1} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque d'après les croissances comparées : $n^3 . |x|^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum n x^{n-1}$ converge absolument donc converge.

* Ainsi : $\boxed{\text{la série } \sum n x^{n-1} \text{ converge} \iff x \in]-1, 1[}$

26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{(1 - (n+1)x^n) \times (1 - x) - (x - x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - (n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

en dérivant p/r à x.

Or $(n+1)x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $nx^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(1-x)^2}$$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$

28. En dérivant une seconde fois on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{\left(-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n\right)(1-x)^2 - \left(1-(n+1)x^n + nx^{n+1}\right)(-2)(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{\left(-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n\right)(1-x) + \left(1-(n+1)x^n + nx^{n+1}\right) \times 2}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$$

Or $n(n+1)x^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $2(n^2-1)x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et $n(n+1)x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{(1-x)^3}$$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}}$

<u>27.</u> Pour $x \in]-1,1[$ on a par croissances comparées :

$$n^3(n-1)x^{n-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $n(n-1)x^{n-2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme en 25. on conclut que la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ converge.

<u>29.</u> Soit $n \geqslant s$.

$$(X=n) = \overline{A_s} \cap \overline{A_{s+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$$

Comme les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(\overline{A_s}) \times \mathbb{P}(\overline{A_{s+1}}) \times \dots \times \mathbb{P}(\overline{A_{n-1}}) \times \mathbb{P}(A_n)$$

$$= \boxed{(1-p)^{n-s} \times p}$$

<u>30.</u> $n \times \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{-s+1} \times n(1-p)^{n-1}$

Comme $p \in]0,1[$ on a $1-p \in]-1,1[$ donc d'après 25. la série $\sum n\mathbb{P}(X=n)$ converge.

D'après 26. on a :

$$E(X) = \sum_{n=s}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{1-s} \times \sum_{n=s}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}$$

$$= p(1-p)^{1-s} \times \sum_{n=1}^{+\infty} (n+s-1)(1-p)^{n+s-2} \quad \text{en posant } n = n'+s-1$$

$$= p \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} + (s-1) \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} \right]$$

$$= p \cdot \left[\frac{1}{(1-(1-p))^2} + (s-1)\frac{1}{1-(1-p)} \right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{p} + s - 1}$$

31. $n^2 \cdot \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{-s+2} \times n^2 (1-p)^{n-2} \underset{n \to +\infty}{\sim} p(1-p)^{-s+2} \times n(n-1)(1-p)^{n-2}$

donc d'après 27. et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum n^2 \cdot \mathbb{P}(X=n)$ converge.

$$E(X^2) = \sum_{n=s}^{+\infty} n^2 p(1-p)^{n-s} = p\sum_{n=1}^{+\infty} (n+s-1)^2 (1-p)^{n-1}$$

$$= p \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n(n-1) + (2s-1)n + (s-1)^2\right)(1-p)^{n-1}$$

$$= p(1-p) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} + p(2s-1)\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} + p(1-s)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1}$$

$$= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + p(2s-1)\frac{1}{(1-(1-p))^2} + p(1-s)^2 \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{2s-1}{p} + (1-s)^2$$

Donc $V(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{2s-1}{p} + (1-s)^2 - \left(\frac{1}{p} + s - 1\right)^2$

$$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{2s-1}{p} + (1-s)^2 - \frac{1}{p^2} - \frac{2(s-1)}{p} - (s-1)^2$$

$$= \frac{1-2p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

Partie III

32. $D_s = \sum_{n=s}^{+\infty} |n-d| \times \mathbb{P}(X=n)$

$$= \sum_{n=s}^{d} |n-d| . \mathbb{P}(X=n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} |n-d| . \mathbb{P}(X=n)$$

$$= \sum_{n=s}^{d} (d-n) . \mathbb{P}(X=n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) . \mathbb{P}(X=n)$$

$$= \boxed{S_1 + S_2}$$

33. Pour $k \geq 0$:

$$u_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i = k+1 + \sum_{i=1}^{k+1} (k+1-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i$$

On pose $j = i - 1$

$$u_{k+1} = k+1+\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^{j+1}$$

$$= k+1+\frac{9}{10}\cdot\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^{j}$$

donc $\boxed{u_{k+1} = k+1+\frac{9}{10}u_k}$

34. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note H_k le prédicat

"$u_k = 10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k$"

Initialisation

si $k=0$: $10k - 90 + 90\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^k = 0 - 90 + 90$

$$= 0$$

et $\sum_{i=0}^{k}(k-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i = (0-0)\times 1 = 0$

Donc H_0 est vrai.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ pour lequel H_k est vrai.

On a $u_{k+1} = k+1+\frac{9}{10}u_k$

$$= k+1+\frac{9}{10}\times\left(10k - 90 + 90\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^k\right) \text{ d'après } H_k$$

$$= 10k - 80 + 90\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}$$

$$= 10(k+1) - 90 + 90\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}$$

Donc H_{k+1} est vraie.

Par récurrence on a donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k}$$

35. $S_1 = \sum_{n=s}^{d} (d-n) \times \mathbb{P}(X=n)$

$= \sum_{n=s}^{d} (d-n) \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-s} \times \frac{1}{10}$

$= \sum_{n=0}^{d-s} (d-s-n)\left(\frac{9}{10}\right)^n \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{10} u_{d-s}}$

Donc $\boxed{S_1 = d - s - 9 + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$

36. $S_2 - S_1 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) \times \mathbb{P}(X=n) - \sum_{n=s}^{d} (d-n) \times \mathbb{P}(X=n)$

$= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) \times \mathbb{P}(X=n) + \sum_{n=s}^{d} (n-d) \times \mathbb{P}(X=n)$

donc $\boxed{S_2 - S_1 = \sum_{n=s}^{+\infty} (n-d) \times \mathbb{P}(X=n)}$

Donc

$$S_2 - S_1 = \sum_{n=s}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) - d \cdot \sum_{n=s}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)$$

or $\sum_{n=s}^{+\infty} n.\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + s - 1$

et $\sum_{n=s}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{10} \sum_{n=s}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-s} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 1$

Donc $S_2 - S_1 = \frac{1}{p} + s - 1 - d = 9 + s - d$

Ainsi $S_2 = S_1 + 9 + s - d = \boxed{9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$

Enfin : $D_s = S_1 + S_2 = \boxed{d - s - 9 + 18.\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$

Partie IV

37. $D_{s+1} - D_s = d - (s+1) + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-(s+1)+1}$

$- \left(d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}\right)$

$= \boxed{-1 + 2(1-p)^{d-s}}$

38. $D_{s+1} - D_s \geqslant 0 \iff (1-p)^{d-s} \geqslant \frac{1}{2}$

$\iff (d-s) \times \ln(1-p) \geqslant -\ln 2$

$\iff d - s \leqslant -\frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$

Donc :

$$D_{s+1} - D_s \geqslant 0 \iff s \geqslant d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$$

$$\iff s \geqslant \alpha$$

La suite $(D_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante puis croissante.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ alors D_s est minimal pour $s = \lfloor \alpha \rfloor + 1$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors on peut avoir $s = \alpha$ et alors $D_{\alpha+1} = D_\alpha$

donc D_s est minimal pour $s = \alpha + 1$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas } D_s \text{ est minimal pour } s = \lfloor \alpha \rfloor + 1}$$

39. $\alpha = d + \dfrac{\ln 2}{\ln(0{,}9)}$

$$2^{-1/6} < 0{,}9 < 2^{-1/7} \iff -\frac{1}{6}\ln 2 < \ln(0{,}9) < -\frac{1}{7}\ln 2$$

$$\iff -7 < \frac{\ln 2}{\ln(0{,}9)} < -6$$

$$\iff d-7 < \alpha < d-6$$

On doit commencer à chercher une place 6 numéros avant l'arrivée (à $d-6$) si $d \geqslant 6$, et dès le numéro 0 sinon.