PCSI 1 - DEVOIR MAISON N$^\circ$ 13 **Année scolaire 2019-2020**
A rendre le lundi 20 avril 2020

<u>EXERCICE 1</u> : Intégrales de Wallis

Soit $(W_n)_{n\geq 0}$ la suite des *intégrales de Wallis* définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, dt.$$

1. A l'aide d'un changement de variable affine (i.e. du type t=au+b), montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\, dt.$$
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est strictement positive.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. Conclusion ?
4. (a) Calculer W_0 et W_1.
   (b) En intégrant par parties, donner une première relation liant W_{n+2} et W_n, puis en déduire que :
   $$\forall n \geq 0,\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$
   (c) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :
   $$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
5. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :
   $$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$
   (b) En déduire que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \geq 1,\ nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$
   (d) En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, puis donner la limite de la suite $(W_n)_{n\geq 0}$.
6. En comparant l'équivalent trouvé en 5.(d) et la valeur exacte de W_{2n} trouvée en 4.(c), montrer que
$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$
7. **[*]** On souhaite, dans cette question, démontrer la *formule de Stirling* :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$
Pour cela on admet qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$
(Ce résultat sera prouvé dans le chapitre sur les séries numériques.)
   (a) **[*]** Vérifier que : $\displaystyle\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{C} \times \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$
   (b) **[*]** À l'aide de la question 6., conclure sur la valeur de C.
8. **[*]** En calculant la limite lorsque $n \to +\infty$ de $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}}$ démontrer le *produit de Wallis* :
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots$$

<u>EXERCICE 2</u> : Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-2z, 2x+2y-z) \end{array}$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. f est-il injectif ? surjectif ? un automorphisme ?
4. f est-il un projecteur ? Une symétrie ?
5. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

<u>EXERCICE 3</u> : Dérivation discrète dans $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
   (b) **[*]** On suppose que P est un polynôme constant : déterminer $\Delta(P)$.
   On suppose que $\deg(P) \geq 1$: vérifier que $\deg\left[\Delta(P)\right] = \deg(P) - 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{K}_n[X]$.
   (a) **[*]** Justifier que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
   (b) **[*]** Déterminer le noyau de Δ_n.
   (c) **[*]** En admettant que $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) + \dim(\mathrm{Im}(\Delta_n)) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ en déduire que $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
3. **[*]** À l'aide de la question précédente, montrer que Δ est surjectif.