PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 15 **Année scolaire 2019-2020**
A rendre le dimanche 10 mai 2020

<u>EXERCICE 1</u> : Représentations matricielles

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorpisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Donner une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette somme directe et telle que :
$$\mathrm{Mat}(f;\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} D$$
3. Ecrire la formule de changement de base reliant A et D et en déduire les coefficients de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Donner alors l'expression analytique de f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. On note p la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $f = 3p$.