EXERCICE 1 : Équation trigonométrique

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\big((2k+1)x\big) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}$ de deux manières différentes :
   (a) en procédant par récurrence, après avoir justifié que :
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(a) \times \sin(b) = \sin^2\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
   (b) par un calcul direct après avoir montré que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\big((2k+1)x\big) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{i2x}\right)^k\right)$.
2. En déduire les solutions dans $]0, \pi[$ de l'équation :
   $$\sin x + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$$

EXERCICE 2 (facultatif) : Une inégalité pour le module

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
On note ω la racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité : $\omega = \mathrm{e}^{i2k\pi/n}$.

1. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + b\omega^k\right)$.
2. En déduire l'inégalité :
   $$|a| + |b| \leqslant \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + b\omega^k\right|$$
   On remarquera que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\left|b + a\omega^k\right| = \left|a + b\omega^{n-k}\right|$