PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 5 **Année scolaire 2019-2020**
A rendre le lundi 4 novembre 2019

PROBLÈME : Caractérisations des fonctions exponentielles

Le but de ce problème est de donner deux caractérisations des fonctions du type $t \longmapsto e^{at}$ où a est une constante réelle.

Partie I : Une première caractérisation des fonctions exponentielles

1. Soit $(a, C) \in \mathbb{R}^2$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ce^{at}$. Montrer que y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - ay(t) = 0$$
2. Réciproquement on suppose que $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - ay(t) = 0$$
   (a) On pose $z(t) = y(t) \times e^{-at}$. Montrer que z est constante sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel C tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ce^{at}$.

Partie II : Caractérisation des fonctions linéaires

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dira que g vérifie la relation (**R**) lorsque :
$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad g(s + t) = g(s) + g(t)$$
On cherche des hypothèses à ajouter pour que g soit du type $t \longmapsto at$ où $a \in \mathbb{R}$ (fonctions linéaires).

1. Soit g une application vérifiant la relation (**R**).
   (a) Montrer que $g(0) = 0$.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(nt) = ng(t)$.
   (c) Montrer que g est impaire et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $g(nt) = ng(t)$.
   (d) Soient x un réell et r un rationnel noté $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $g\left(\dfrac{1}{q}t\right) = \dfrac{1}{q}g(t)$ puis que $g(rt) = rg(t)$.
2. On suppose que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application vérifiant la relation (**R**) et qu'elle est continue en 0 ie $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = g(0) = 0$.
   On fixe un réel t et on se donne (r_n) une suite de nombre rationnels qui converge vers t : $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = t$. *(On admettra l'existence de la suite (r_n).)*
   Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(t - r_n) = 0$ puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(r_n) = g(t)$ et conclure que si on pose $a = g(1)$ alors $g(t) = at$.

3. On suppose que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application vérifiant la relation (**R**) et qu'elle est monotone.
   On fixe un réel t et on se donne (r_n) une suite croissante de nombre rationnels qui converge vers t et (s_n) une suite décroissante de nombre rationnels qui converge vers t.
   On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n \leq t \leq s_n$.
   On admettra l'existence des suites (r_n) et (s_n).
   Montrer que si on pose $a = g(1)$ alors $g(t) = at$.
4. Conclure que si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application :
$$\begin{aligned} g \text{ est du type } t \longmapsto at \text{ où } a \in \mathbb{R} \quad &\Longleftrightarrow \quad g \text{ verifie } (\mathbf{R}) \text{ et est continue en } 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad g \text{ verifie } (\mathbf{R}) \text{ et est monotone} \end{aligned}$$

Partie III : Caractérisation des fonctions logarithmes

Soit $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dira que h vérifie la relation (**L**) lorsque :
$$\forall (s,t) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad h(st) = h(s) + h(t)$$
On cherche des hypothèses à ajouter pour que h soit du type $t \longmapsto a\ln(t)$ où $a \in \mathbb{R}$ (fonctions logarithmes).

1. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = h\big(\mathrm{e}^t\big)$. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et que :
$$g \text{ vérifie } (\mathbf{R}) \Longleftrightarrow h \text{ vérifie } (\mathbf{L})$$
2. En utilisant la partie II, conclure que si $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application alors :
$$\begin{aligned} h \text{ est du type } t \longmapsto a\ln(t) \text{ où } a \in \mathbb{R} \quad &\Longleftrightarrow \quad h \text{ verifie } (\mathbf{L}) \text{ et est continue en } 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad h \text{ verifie } (\mathbf{L}) \text{ et est monotone} \end{aligned}$$
   On rappelle que h continue en 1 signifie que $\lim\limits_{t \to 1} h(t) = h(1)$.

Partie IV : Une autre caractérisation des fonctions exponentielles

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dira que f vérifie la relation (**E**) lorsque :
$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s) \times f(t)$$
On cherche des hypothèses à ajouter pour que f soit du type $t \longmapsto \mathrm{e}^{at}$ où $a \in \mathbb{R}$ (fonctions exponentielles).

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant la relation (**E**).
   (a) Si f est constante montrer qu'elle vaut 0 ou 1.
   (b) Si f s'annule un point t_0 de $\mathbb{R}$, montrer que f est la fonction nulle.
   (c) Si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) > 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application à valeurs strictement positives.
   On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \ln\big(f(t)\big)$. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et que :
$$g \text{ vérifie } (\mathbf{R}) \Longleftrightarrow f \text{ vérifie } (\mathbf{E})$$
3. En utilisant la partie II, conclure que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application différente de la fonction nulle alors :
$$\begin{aligned} f \text{ est du type } t \longmapsto \mathrm{e}^{at} \text{ où } a \in \mathbb{R} \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ verifie } (\mathbf{E}) \text{ et est continue en } 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad f \text{ verifie } (\mathbf{E}) \text{ et est monotone} \end{aligned}$$