PCSI 1 - DEVOIR MAISON N$^\circ$ 7 **Année scolaire 2019-2020**
A rendre le lundi 25 novembre 2019

<u>EXERCICE 1</u> : Une équation différentielle

On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (*)$$

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifie la propriété $(*)$.
   (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
   $$\forall x > 0, \quad x^2.f''(x) + f(x) = 0$$
   (b) On utilise le changement de variable $t = \ln x$. On pose donc pour tout $t \in \mathbb{R}$: $y(t) = f\left(\mathrm{e}^t\right)$. Montrer que y est solution sur $\mathbb{R}$ de :
   $$y'' - y' + y = 0$$
   (c) En déduire une expression de $y(t)$ en fonction de t.
   (d) Montrer qu'il existe un couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $$\forall x > 0, \quad f(x) = \sqrt{x}.\left(\lambda.\cos\left(\frac{\sqrt{3}.\ln(x)}{2}\right) + \mu.\sin\left(\frac{\sqrt{3}.\ln(x)}{2}\right)\right)$$
2. Conclure que les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant la propriété $(*)$ sont les fonctions de la forme :
   $$\forall x > 0, \quad f(x) = C.\sqrt{x}.\cos\left(\frac{\sqrt{3}.\ln(x)}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$
   où C est une constante réelle.

<u>EXERCICE 2</u> : Une équation intégrale

Dans tout l'exercice on fixe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$
   (a) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\mathrm{d}t$$
   (b) Montrer que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.