PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N°2 **Année scolaire 2019-2020**
Samedi 21 septembre 2019

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

<u>Exercice 1</u> : Fonctions numériques réelles

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique racine réelle, notée α.
   Justifier que $0 < \alpha < 1$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.
   Vérifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{x+1}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$
   Vérifier que f induit une bijection de $]-1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.
   On note encore f la restriction $f_{]-1,+\infty[}^{J}$. Pour $y \in J$, donner l'expression de $f^{-1}(y)$.

<u>Exercice 2</u> : Sur les applications

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ bijective.
Montrer que f et g sont bijectives.

<u>Exercice 3</u> : Partitions d'un entier

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appellera **partition** de $[\![1,n]\!]$ toute ensemble $\mathscr{A}$ de parties de $[\![1,n]\!]$ de la forme :

$$\mathscr{A} = \left\{A_1, A_2, \ldots, A_k\right\}$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1\leq i\leq k}$ est une famille de parties de $[\![1,n]\!]$ **non vides**, **deux à deux disjointes**, **d'union égale à** $[\![1,n]\!]$. On dira que $\mathscr{A}$ **est une partition de** $[\![1,n]\!]$ **en** k **parties**. Par exemple, l'ensemble

$$\mathscr{A} = \left\{\{1\};\{3,4,5\};\{2,9\};\{6\};\{7,8\}\right\}$$

est une partition de $[\![1,9]\!]$ en 5 parties. L'ensemble

$$\mathscr{B} = \left\{\{3,4,5\};\{2,9\};\{1\};\{6\};\{7,8\}\right\}$$

donne la même partition (car $\mathscr{B} = \mathscr{A}$). L'ensemble

$$\mathscr{C} = \left\{\{1,2\};\{3\};\{4,5,6\};\{7\};\{8,9\}\right\}$$

est une autre partition de $[\![1,9]\!]$ en 5 parties.

On notera, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$ le **nombre de partitions de** $[\![1,n]\!]$ **en** k **parties** (ce sont les nombres de Stirling de deuxième espèce).

On adopte les conventions : $\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} = 1, \quad \forall k\geq 1,\ \left\{\begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix}\right\} = 0 \quad$ et $\quad \forall n \geq 1,\ \left\{\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\} = 0.$

⚠Les notations $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$ et $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ se ressemblent, mais mathématiquement elles n'ont aucun lien.

En particulier aucune des propriétés vues en cours pour $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ n'est utilisable pour $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$.

1. **Premières propriétés**

   (a) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}$. Établir que, si $n < k$, alors $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = 0$.

   (b) Calculer grâce à une énumération des cas : $\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right\}$ et $\left\{\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}\right\}$.
   Pour démontrer les résultats généraux des questions suivantes, on n'hésitera pas à s'appuyer sur ces exemples pour comprendre les dénombrements à mettre en place.

   (c) Calculer $\left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\}$ et $\left\{\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Justifier grâce à une énumération des cas que $\left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\} = 7$.

   (e) Établir par un dénombrement direct que $\left\{\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right\} = 2^{n-1} - 1$ pour $n \geq 1$ (on traitera à part le cas $n = 1$).

   (f) Avec la même méthode, montrer que pour tout $n \geq 2$, $\left\{\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right\} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. **Une formule de récurrence de type « Pascal »**
Soient $n \geq 2$ et $k \in [\![2,n]\!]$. Dans les deux questions suivantes, si $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ est une partition de $[\![1,n]\!]$ en k parties, on note A_1 l'élément de cette partition qui contient 1 (A_1 est donc une partie de $[\![1,n]\!]$ telle que $1 \in A_1$).
   (a) Dénombrer les partitions $\mathscr{A}$ de $[\![1,n]\!]$ en k parties, pour lesquelles la partie A_1 ne contient que l'élément 1 (c'est-à-dire telles que $A_1 = \{1\}$).
   (b) Dénombrer les partitions $\mathscr{A}$ de $[\![1,n]\!]$ en k parties, pour lesquelles la partie A_1 contient au moins élément autre que 1 (c'est-à-dire telles que $\{1\} \subsetneq A_1$).
   (c) En déduire que :
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\},$$
   (d) Construire alors une table donnant les coefficients $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ pour $0 \leq k \leq 6$ et $0 \leq n \leq 6$.

3. **Lien avec le nombre de surjections**
Montrer que :
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad S_n^p = n! \left\{ \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\},$$
où S_n^p désigne le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

4. **Une formule de type « binôme de Newton »**
Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^{\underline{n}} = x(x-1)\ldots(x-n+2)(x-n+1)$ (*puissance factorielle descendante*).
   (a) Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $x \times x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \times x^{\underline{k}}$
   (b) En déduire par récurrence que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}$

5. **Deux autres formules amusantes... à démontrer par dénombrement !**
   (a) On considère les partitions de $[\![1,n+1]\!]$ en $p+1$ parties. On note A_1 la partie contenant 1, et on « trie » les partitions de $[\![1,n+1]\!]$ en $p+1$ parties, selon le nombre d'éléments de A_1. En distinguant les cas où $\mathrm{Card}(A_1) = n-k+1$, avec $k \in [\![p,n]\!]$, montrer que :
$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ p+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ p \end{matrix} \right\}.$$
   (b) On considère les partitions de $[\![1,n]\!]$ en $\ell + p$ parties, parmi lesquelles on aurait « marqué » ℓ parties. On les trie suivant la valeur du nombre <u>total</u> d'éléments de ces ℓ parties « marquées ». Si on note k ce nombre, montrer qu'il peut prendre toute valeur de $[\![\ell, n-p]\!]$, et en déduire que :
$$\forall (n,p,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ \ell+p \end{matrix} \right\} \binom{\ell+p}{\ell} = \sum_{k=\ell}^{n-p} \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ \ell \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n-k \\ p \end{matrix} \right\}.$$