PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N°3 **Année scolaire 2019-2020**
Samedi 19 octobre 2019

Durée du devoir : 4h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

QUESTIONS DE COURS.

1. Énoncer la formule du binôme.
2. Si $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}$, factoriser a^n-b^n par $a-b$ (formule de Benoulli).
3. Si $\theta\in\mathbb{R}$, donner $\sin(\theta)$ en fonction de $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
4. Linéariser $\sin^3(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

EXERCICE 1 : Méthode de Cardan pour les équations du troisième degré sur un exemple

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$z^3-6z+4=0. \qquad (*)$$

1. On notera $j=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) On pose $a=-2+2i$. Mettre a sous forme trigonométrique.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3=-2+2i$.
   (c) Donner les solutions sous forme trigonométrique. En utilisant la forme algébrique du nombre j, vérifer que les trois solutions s'écrivent aussi :

$$1+i \qquad \frac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

   (d) En déduire que les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right)$ et $\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right)$ à l'aide du symbole $\sqrt{\ }$.
2. On se donne $z\in\mathbb{C}$ solution de $(*)$. Soit $(u,v)\in\mathbb{C}^2$ tel que $u+v=z$ et $uv=2$.
   (a) Calculer u^3+v^3 et u^3v^3.
   (b) En déduire les 2 valeurs possibles du couple (u^3,v^3), puis les 6 valeurs possibles du couple (u,v) (ne pas perdre de vue que $uv=2$).
3. Montrer alors que l''équation $(*)$ admet exactement trois solutions (et les donner).

EXERCICE 2 : Une partie de boules

Une urne contient $n \geqslant 1$ boules numérotées de 1 à n. On tire p boules, $p \in [\![1, n]\!]$.

1. On suppose dans cette question que les p boules sont tirées *simultanément*.
   (a) Combien y a-t-il de déroulements possibles des tirages de p boules ?
   (b) Soit $k \in [\![p, n]\!]$.
      i. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels toutes les boules obtenues ont un numéro inférieur ou égal à k.
      ii. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels le plus grand numéro obtenu est k.
   (c) En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.
2. On suppose dans cette question que les p boules sont tirées *une par une, successivement, et sans remise*.
   (a) Combien y a-t-il de déroulements possibles des tirages de p boules ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule numéro 2 ?
3. On suppose dans cette question que les p boules sont tirées *une par une, successivement, et avec remise*.
   (a) Combien y a-t-il de déroulements possibles des tirages de p boules ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages pour lesquels le premier numéro obtenu est strictement inférieur au dernier ?
   (c) Combien y a-t-il de tirages pour lesquels la somme des numéros obtenus est $p+2$?
   (d) Combien y a-t-il de tirages donnant **exactement** deux numéros distincts ?

EXERCICE 3 : Noyaux de Dirichlet et de Fejer puis une jolie formule

Dans cet exercice, on propose de démontrer que si d et n sont deux entiers naturels non nuls tels que $1 \leq d \leq n-1$ alors :

$$\frac{\sin^2\left(d\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{\sin^2\left(d\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} + \cdots\cdots\cdots + \frac{\sin^2\left(d\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(d\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} = d \times (n-d)$$

Partie 1. Calcul du noyau de Dirichlet

On fixe t un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$ et n un entier naturel. On pose $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et on définit le n-ième noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \mathrm{e}^{-int} + \cdots + \mathrm{e}^{-it} + 1 + \mathrm{e}^{it} + \cdots + \mathrm{e}^{int}$$

1. Justifier que $e^{it} \neq 1$ et $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$.

2. **Première méthode pour le calcul de** $S_n(t)$. Dans cette question on pose $A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}$.

   En faisant apparaître une somme géométrique calculer $A_n(t)$ et en déduire que :

$$S_n(t) = \frac{\cos\left(\frac{nt}{2}\right) \times \sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3. **Seconde méthode pour le calcul de** $S_n(t)$. On suppose à nouveau que $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$.

   Calculer $S_n(t) \times \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ en faisant apparaître une somme télescopique et retrouver le résultat de la question précédente.

4. Conclure que $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

Partie 2. Calcul du noyau de Fejer et application

On fixe t un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$ et n un entier naturel non nul. On définit le n-ième noyau de Fejer par $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$.

1. **Une première expression de** $F_n(t)$**.**

   (a) Montrer que $F_n(t) = \dfrac{1}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right)$ et en déduire que $F_n(t) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.

   (b) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $D_k(t) = \dfrac{\cos(kt) - \cos\left((k+1)t\right)}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ et retrouver la formule de la question précédente.

2. **Une seconde expression de** $F_n(t)$**.**

   (a) Justifier que $F_n(t) = \dfrac{1}{n} \sum_{p=-(n-1)}^{n-1} \left(\sum_{k=|p|}^{n-1} e^{ipt}\right)$.

   (b) Conclure que $F_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} \left(1 - \dfrac{|p|}{n}\right) e^{ipt}$.

Partie 3. Somme géométriques de racines n-ièmes de l'unité

On fixe n un entier naturel non nul et on pose $\omega = e^{i2k\pi/n}$.

1. Calculer la somme $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

2. Pour $\ell \in \mathbb{Z}$, on pose $S_n(\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^\ell)^k$.

   Montrer que :

$$S_n(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ ne divise pas } \ell \\ n & \text{si } n \text{ divise } \ell \end{cases}$$

Partie 4. La formule souhaitée

On fixe d et n deux entiers naturels non nuls tels que $1 \leq d \leq n-1$.

Dans cette partie on admettra que si $\ell \in [\![1, n-1]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{2k\ell\pi}{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-i\frac{2k\ell\pi}{n}} = -1$.

1. **Utilisation du noyau de Fejer**. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} d \times F_d\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ en utilisant les deux expressions trouvées dans la partie 2. et en déduire la formule donnée dans l'introduction de l'exercice.
2. **Une preuve directe**.
   (a) Montrer que si $t \in]0, \pi[$:
   $$\frac{\sin(dt)}{\sin(t)} = e^{i(d-1)t} \sum_{p=0}^{d-1} e^{-2ipt}$$
   et que :
   $$\frac{\sin(dt)}{\sin(t)} = e^{-i(d-1)t} \sum_{p=0}^{d-1} e^{2ipt}$$
   (b) En multipliant ces deux formules en déduire que si $t \in]0, \pi[$:
   $$\frac{\sin^2(dt)}{\sin^2(t)} = d + \sum_{\substack{(p,q)\in[\![0,d-1]\!]^2 \\ p\neq q}} e^{i2(p-q)t}$$
   (c) Vérifier alors que :
   $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(d\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = d \times (n-1) + \sum_{\substack{(p,q)\in[\![0,d-1]\!]^2 \\ p\neq q}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{2k(p-q)\pi}{n}}\right)$$
   puis conclure.