PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N°4 **Année scolaire 2019-2020**
Samedi 7 décembre 2019

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

QCM : Matrices

Cochez la ou les bonnes réponses (ne rien cocher si toutes les réponses sont fausses). **Ne pas oublier de rendre le sujet en fin d'épreuve.**

1. Comment appelle-t-on les nombres dans une matrice ?
   - ☐ Les produits.
   - ☐ Les résultats.
   - ☐ Les coefficients.
2. Dans quel(s) cas peut-on additionner ou soustraire deux matrices ?
   - ☐ Lorsqu'elles sont de la même taille.
   - ☐ Lorsque'elles ont des nombres identiques sur la diagonale.
   - ☐ Lorsque le nombre de colonnes est supérieur au nombre de lignes.
3. Comment peut-on multiplier deux matrices ?
   - ☐ On fait la somme des produits d'une ligne A et d'une colonne B.
   - ☐ On multiplie le coefficient de la matrice A par le coefficient se trouvant à la même place dans la matrice B.
   - ☐ On multiplie tous les coefficients entre eux.
4. Dans quel(s) cas le produit de matrices est-il impossible ?
   - ☐ Lorsqu'elles ne sont pas de la même taille.
   - ☐ Lorsque l'une des matrices contient des coefficients égaux à 0.
   - ☐ Lorsque le nombre de colonnes de la première matrice est différent du nombre de lignes de la deuxième matrice.
5. Dans quel(s) cas une matrice est diagonale ?
   - ☐ Lorsqu'elle n'a que des 1 sur sa diagonale.
   - ☐ Lorsque sa diagonale n'a que des coefficients non nuls.
   - ☐ Lorsqu'elle n'a que des coefficients nuls sur sa diagonale.

<u>EXERCICE 1</u> : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' - xy' + y = x^3$.

1. Soit y une solution de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (a) On définit une fonction $z :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $z(x) = xy'(x) - y(x)$. Montrer que z est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :
   $$\forall x > 0, \quad xz'(x) - z(x) = x^3$$
   (b) En déduire une expression de $z(x)$.
   (c) En déduire une expression de $y(x)$.
2. Donner toutes les solutions de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

<u>EXERCICE 2</u> : Irrationnalité de e

On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre réel qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, et qu'on note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
Un nombre réel sera donc dit *irrationel*, s'il ne peut pas s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs.

1. **Un résultat préliminaire.** On suppose que f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et que $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$.
   On veut montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
   Pour cela on note F et G les primitives de f et g respectivement qui s'annulent en a.
   (a) Étudier les variations de $G-F$ sur $[a,b]$ et en déduire le signe de $G-F$ sur $[a,b]$.
   (b) Prouver l'inégalité souhaitée.
2. **Irrationnalité de** e**.**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant une intégration par parties, démontrer que :
   $$\int_0^1 \mathrm{e}^t(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \mathrm{e}^t\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t$$
   (b) En utilisant une preuve par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n :
   $$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{n!}(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$.
   (d) En utilisant le résultat de la première question, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\frac{1}{(n+1)!} \leq \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$$
   (e) En déduire que pour tout $n \geq 2$, il existe un entier a_n qu'on précisera tel que $a_n < n! \times \mathrm{e} < a_n + 1$.
   (f) Conclure que e est irrationnel (on pourra raisonner par l'absurde).

EXERCICE 3 : Étude de deux suites implicites

Dans cette partie on prendra n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}^+$ notées u_n et v_n (on pourra appliquer le théorème de la bijection monotone à la fonction f_n sur deux sous-intervalles de $\mathbb{R}^+$).
   (b) Démontrer que pour tout $n \geq 2$: $u_n < 1 < v_n$.
2. À l'aide de la figure donnée en annexe, quelle(s) conjecture(s) peut-on faire sur le comportemant des suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$?
3. (a) Pour n entier tel que $n \geq 2$, déterminer le signe de $f_{n+1}(v_n)$. En déduire le sens de variations de la suite (v_n).
   (b) Justifier que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ.

BONUS

EXERCICE 4 : À NE FAIRE QUE SI TOUT LE RESTE EST TERMINÉE

Le but de cet exercice est de déterminer les éventuelles fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$$

1. Démontrer que la fonction cos est solution de (E).
2. Soit f une solution de (E).
   (a) Déterminer $f(0)$.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.
   (c) Démontrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
3. Conclure en donnant toutes les solutions de (E).