PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N°5 **Année scolaire 2019-2020**
Samedi 18 janvier 2020

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Calculs de limite

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos(x)-1} + \dfrac{2}{x^2}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\left(\sqrt{t^2+t} - \sqrt{t^2-t} - 1\right)$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} t^2\left(\sqrt{t^2+t} - \sqrt{t^2-t} - 1\right)$.

EXERCICE 2 : Étude d'une suite récurrente

On veut étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = -2 + \dfrac{6}{3-u_n}$.

1. Écrire une fonction Python `suite(n)` qui, étant donné un entier naturel n, renvoie la valeur de u_n.
2. **Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
   On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 3[$ par : $f(x) = -2 + \dfrac{6}{3-x}$.
   (a) Faire l'étude complète de f, et donner l'allure de sa courbe. On placera aussi sur le graphique les points fixes de f.
   (b) Utiliser le graphique pour conjecturer la monotonie et le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire son éventuelle limite).
   (c) Montrer que : $\forall x < 0,\ f(x) < 0$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$
   (d) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conclure sur sa limite.
3. **Expression de u_n en fonction de n.**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Établir que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera la raison.
   (c) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
   (d) Retrouver la limite calculée à la question 2.(d).

<u>EXERCICE 3</u> : Exponentielle d'une matrice

On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$.

1. **Cas d'une matrice nilpotente d'ordre** 3.

   Soit p un entier naturel non nul.
   Une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice 3 si elle vérifie $A^2 \neq 0_p$ et $A^3 = 0_p$.
   Dans cette question, on note A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice 3.
   On note I_p la matrice identité d'ordre p.
   Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice :

$$E(t) = I_p + t.A + \frac{t^2}{2}.A^2$$

   (a) Calculer $E(0)$.

   (b) Vérifier la relation :
   $$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad E(s) \times E(t) = E(s+t)$$

   (c) En déduire que $\left(E(t)\right)^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

   (d) A l'aide de **1.(a)** et **1.(b)**, montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

   (e) Montrer que l'application $E : t \longmapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.
   Rappel : il s'agit de montrer que si $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $E(s) = E(t)$, alors $s = t$.

   (f) **Exemple.** On prend $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Expliciter les coefficients de la matrice $E(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$. On donnera la réponse sous forme d'un tableau matriciel.

2. **Étude d'une matrice.**

   Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

   (b) On pose $D = P^{-1} \times A \times P$. Montrer que D est une matrice diagonale.

   (c) Expliciter D^n pour tout n entier naturel.

   (d) En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

   (e) i. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vérifiant $M^2 = D$.
   Montrer que MD = DM et en déduire que M est diagonale.
   Quels peuvent être ses coefficients diagonaux ?

   ii. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   En étudiant $M = P^{-1}XP$, déterminer le nombre de matrices X solutions de l'équation $X^2 = A$.
   On ne demande pas de calculer explicitement les coefficients de X.

3. **Exponentielle de la matrice A.**

   Dans cette question, A est la matrice étudiée à la question précédente.

   On admettra le résultat suivant, valable pour tout réel t :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)=\mathrm{e}^t$$

   Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}.A^k$.

   On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t)=\begin{pmatrix}a_n(t) & b_n(t)\\ c_n(t) & d_n(t)\end{pmatrix}$.

   (a) Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

   (b) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t)=\begin{pmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{pmatrix}$ avec $a(t)=\lim_{n\to+\infty}a_n(t)$, $b(t)=\lim_{n\to+\infty}b_n(t)$, $c(t)=\lim_{n\to+\infty}c_n(t)$ et $d(t)=\lim_{n\to+\infty}d_n(t)$.
   Expliciter les coefficients de la matrice $E(t)$.
   Réponse partielle : on obtient $a(t)=3\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^t$.

   (c) Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad E(t)=\mathrm{e}^{2t}.Q+\mathrm{e}^t.R$$

   Expliciter Q et R.

   (d) Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ.

   (e) En déduire que :

$$\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2,\quad E(s)\times E(t)=E(s+t)$$

   Que dire que $\big(E(t)\big)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$? de $\big(E(t)\big)^{-1}$?
   L'application $E:t\longmapsto E(t)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle injective ?

BONUS

<u>EXERCICE 4</u> : À NE FAIRE QUE SI TOUT LE RESTE EST TERMINÉE

1. Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de :

$$f_1(x)=\frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}\qquad f_2(x)=\frac{1}{3}\left(8\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\sin(x)\right)$$
$$f_3(x)=\sqrt[3]{\sin^2(x)\tan(x)}\qquad f_4(x)=\frac{1}{3}\big(2\sin(x)+\tan(x)\big)$$

2. En déduire l'existence de $\eta>0$ tel que :

$$\forall x\in]0,\eta[,\quad f_1(x)<f_2(x<x<f_3(x)<f_4(x)$$