PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N°6 **Année scolaire 2019-2020**
Samedi 7 mars 2020

Durée du devoir : 4h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

EXERCICE 1. Cours

1. Donner la définition de f dérivable en x_0.
2. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
3. Énoncer la formule de Leibnitz.
4. À l'aide de quantificateurs, donner la définition d'un sous-espace vectoriel $\mathbb{F}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$.
5. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.
   (a) Pour $x \in \mathbb{E}$, donner la définition de $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ avec des quantificateurs.
   (b) À l'aide de quantificateurs, donner la définition du prédicat $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}$.
   (c) À l'aide de quantificateurs, donner la définition du prédicat $\mathscr{F}$ est une famille libre.

PROBLEME 1

Partie I.

On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
   (b) Montrer soigneusement que f est de classe C^1 sur D.
2. (a) Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
   (b) Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité.

On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continura à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f.

3. (a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur D'.
4. Étudier les variations de f. On dressera son tableau de variations en précisant les limites aux bornes de D'.
   On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

Partie II.

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivant : $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.

Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes :

$$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} \quad \text{et} \quad Q_n(X) = X - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^3}{3^2} - \frac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n^2}$$

5. Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.
6. Justifier : $\forall t \in [0,1],\ 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$
7. En déduire : $\forall x \in [0,1],\ P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Dans toute la suite on notera :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Montrer que $\forall t \in [0,x],\ \left|\dfrac{(-t)^n}{1+t}\right| \leq t^n$ et en déduire la majoration :

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

   On rappelle que si φ est une fonction continue sur $[0,x]$ alors $\left|\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

9. Comparer, pour tout $x \in]0,1]$, $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.
10. On note $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in]0,1],\ g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$.
    (a) Montrer que g_n est continue sur $[0,1]$.
    (b) Montrer que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$
    (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1)$.
11. Écrire un programme en langage Python qui calcule une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

Partie III.

On s'intéresse maintenant aux dérivées successives de f, que l'on note $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

12. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$.
13. Calculer $f''(x)$ pour $x > 0$.
14. On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $T_1(X) = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1}(X) = (1+X)X\,T_n'(X) - n(2X+1)\,T_n(X) + (-1)^n n!(1+X)^n$$

   Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + (-1)^n n! \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) En utilisant formule de Leibnitz, calculer une autre expression de $f^{(n)}(x)$ et en déduire que :

$$T_n(X) = (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(1+X)^{n-k} X^{k-1}$$

    (b) Donner alors le degré et le coefficient dominant de T_n.

PROBLEME 2

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

Dans tout le problème, on confond (identifie) un polynôme et sa fonction polynomiale associée sur $[-1,1]$. Ceci sera justifié dans le préliminaire.

Le but de ce problème est d'étudier l'approximation d'une fonction de classe C^n sur un segment par des polynômes coïncidant avec f en certains points.

Pour une fonction continue $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, on notera $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ (norme infinie de f). L'existence de cette quantité est justifiée dans le préliminaire.

Préliminaires.

1. Si $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ sont tels que $\forall x \in [-1,1]$, $P(x) = Q(x)$ montrer que $P = Q$.

Dans tout le problème on confondra donc polynôme et fonction polynomiale associée sur $[-1,1]$.

2. Si f est une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

Partie I. Polynômes de Tchebychev.

Le but de cette partie est de montrer que pour tout polynôme unitaire de degré n, $\|P\|_\infty \geq 2^{1-n}$ et que cette inégalité est atteinte pour $P = 2^{1-n} T_n$ (i.e. $\|2^{1-n} T_n\|_\infty = 2^{1-n}$), où $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes définie dans la première partie du problème.

Pour tout entier naturel n, on définit sur $[-1,1]$ la fonction T_n par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

3. Pour $x \in [-1,1]$, calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - Tn(x)$$

   On pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$.
5. Pour $x \in [-1,1]$, calculer $T_2(x)$, $T_3(x)$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de $T_n(X)$ et son coefficient dominant.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité de $T_n(X)$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que :
   $$\forall \theta \in [0, \pi], \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
   (b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
   Montrer que les réels $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont racines de $T_n(X)$.
   (c) En déduire que $T_n(X)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.
   (d) Donner la factorisation de $T_n(X)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
   (e) Montrer que :
   $$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
10. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$.
11. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n(X) = 2^{1-n} T_n(X)$ est un polynôme unitaire et de degré n.
12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}$.
13. Dans cette question, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir $P(X)$ un polynôme unitaire de degré n et tel que $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$, c'est-à-dire que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|P(t)| < 2^{1-n}$.
   Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\alpha_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
   (a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.
   (b) Donner le signe de $V_n(\alpha_k) - P(\alpha_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
   (c) En déduire que $V_n(X) = P(X)$. Conclure.

Partie II. Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.

Dans cette partie, on se donne $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n et on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.

On note P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(a_i) = f(a_i)$$
On a prouvé l'existence et l'unicité d'un tel polynôme en TD à l'aide des polynômes de Lagrange.

On note $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$.

12. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi : x \longmapsto f(x) - P(x) - \lambda S(x)$. Dans cette question, on fixe $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.
    (a) Montrer qu'il est possible de choisir λ en fonction de t tel que $\varphi(t) = 0$.
    On fixe ainsi λ dans la suite de la question 12.
    (b) Montrer que φ s'annule $n + 1$ fois au moins sur $[-1, 1]$.
    (c) En déduire que $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$.
    (d) Pour tout $x \in [-1, 1]$, déterminer $\varphi^{(n)}(x)$ en fonction de $f^{(n)}(x)$, n et λ.
    (e) En déduire qu'il existe $a \in [-1, 1]$ tel que $f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} S(t)$.
13. Déduire de la question précédente que :
    $$\forall t \in [-1, 1], \quad |f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |S(t)|$$
    où $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.
14. Pour quel choix de $a_1, \ldots, a_n$ la quantité $\|S\|_\infty$ est-elle minimale? Montrer qu'alors :
    $$\|f - P\|_\infty \leq \frac{M_n}{n! 2^{n-1}}$$
    On pourra utiliser la partie I.