PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N°7 **Année scolaire 2019-2020**
Samedi 25 avril 2020

Durée du devoir : 4h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants. Il est fortement conseillé de partager son temps équitablement entre les trois.

EXERCICE 1 : Paradoxe de Penney (1969)

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce **équilibrée**, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables. Les lancers sont effectués de manières indépendantes.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n l'évènement « pile apparaît au lancer de rang n » et par F_n l'évènement « face apparaît au lancer de rang n ».

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$, et $U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$.

On pose aussi pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 : $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Pour $n \geq 3$, expliciter clairement et en français les évènements B_n et U_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est croissante et convergente.
3. Calculer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'évènement B_n.
4. Pour $n \geq 3$, vérifier que les évènements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
   Pour $n \geq 3$, les évènements B_n et B_{n+3} sont-ils incompatibles ?
5. En déduire les valeurs des nombres u_3, u_4 et u_5.
6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.
   (a) Justifier l'égalité des évènements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité en fonction de u_{n-2}.
   (b) Exprimer l'évènement U_{n+1} en fonction des évènements U_n et B_{n+1}.
   En déduire l'égalité suivante : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$. Comment interpréter ce résultat ?

On admettra qu'on obtient le même résultat avec la séquence « face, pile, pile ».

Deux joueurs J et J' s'affrontent maintenant dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :
• le joueur J est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
• le joueur J' est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;
• si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, **le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J.**

7. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note G_n l'évènement « le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n » et g_n la probabilité de G_n.
   (a) Calculer g_3 et g_4 et établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (b) En déduire la probabilité h_n pour que le joueur J soit déclaré gagnant **avant** le lancer de rang $n+1$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n$. Interpréter ce résultat.

Dans un programme Python, l'instruction `r=randint(2)` a pour effet de donner aléatoirement à la variable r la valeur 0 ou 1, ces deux valeurs étant équiprobables.

On considère la procédure Python suivante :

```
def Quigagne():
    x=0
    y=0
    k=0
    while x<3 and y<3:
        k=k+1
        r=randint(2)
        if r==1:
            if x>=1:
                x=2
            else:
                x=1
            if y>=1:
                y=y+1
        else:
            if x==2:
                x=3
            else:
                x=0
            y=1
     if x==3:
         print('.....')
     else:
         print('.....')
```

8. (a) Donner sous forme d'un tableau les valeurs successives prises par les variables x, y et k lors de l'exécution de cette procédure, si les valeurs données à la variable r par l'instruction `randint(2)` sont successivement :
   ⋆ $1, 1, 1, 1, 0$
   ⋆ $1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1$
   ⋆ $0, 1, 0, 1, 0, 1, 1$
   (b) Que représente la dernière valeur prise dans la procédure par la variable k et quels textes pourrait-on substituer aux pointillés de la dernière instruction ?
   Qu'afficherait alors l'ordinateur dans les trois exemples de la question précédente ?

<u>EXERCICE 2</u> : Calcul de l'intégrale de Gauss via les intégrales de Wallis

On définit $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant (voir DM13) :

$$\sqrt{n} \times W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'expression de $F'(x)$.
2. Montrer que F est strictement croissante.
3. (a) Pour $x \in [1, +\infty[$, montrer que $\mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$.

   (b) En déduire que F est majorée sur $\mathbb{R}^+$, puis que F admet une limite en $+\infty$.

Dans toute la suite, on notera $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ cette limite.

4. Montrer que : $\forall u \in]-1, +\infty[, \ \ln(1+u) \leq u$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   (b) En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$, montrer que :

   $$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^{-t^2} \leq \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

   (b) En posant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, montrer que :

   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2(n-1)}(u)\,\mathrm{d}u$$

   (c) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^{2(n-1)}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2(n-1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

   (d) Déduire des questions précédentes que :

   $$\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}\,W_{2n-2}$$

7. Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (intégrale de Gauss).

<u>EXERCICE 3</u> : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

On désigne par $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes P de la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$

et :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Vérifier que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-1)$. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et le rang de φ.
5. L'application φ est-elle injective ? surjective ?
6. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

7. En déduire, en utilisant le théorème de la valeur moyenne, que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\varphi\big(f^n(P)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$