PCSI - CONCOURS BLANC **Année scolaire 2018-2019**
Mardi 16 juin 2020

Durée du devoir : 4h00.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de 3 problèmes, tous indépendants.

Questions de cours :

1. Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Alors :
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
2. Si X est une VAR qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

PROBLÈME 1

Partie I - Isométrie de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit A la matrice définie par :
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Calculer $A \times {}^tA$. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer $\det(A)$.
3. Donner un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_1$ tel que $\ker(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1)$.
4. Soit $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$. Calculer le déterminant de la famille $\left(\overrightarrow{j}, f(\overrightarrow{j}), \overrightarrow{u}_1\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer une base orthonormée $(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ de $\ker(f-\mathrm{id})^\perp$. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
où $\theta \in [0, 2\pi[$ est un réel à déterminer.

Partie II - Espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 et E l'ensemble des matrices de taille 2, réelles et symétriques.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(M, M') = aa' + 2bb' + cc'$.

6. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\dim(E) = 3$.
7. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
8. Soit $\mathcal{B}$ la famille définie par :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

   Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Partie III - Application linéaire sur E

On considère E muni du produit scalaire φ défini dans la partie II.

On définit l'application g sur E par : $\forall M \in E$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,

$$g(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{a+c}{2} - b & \dfrac{a-c}{2} \\ \dfrac{a-c}{2} & \dfrac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$$

9. Montrer que g est un endomorphisme de E.
10. Vérifier que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ de la partie II est la matrice A de la partie I.
11. À l'aide de la partie I, déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice B de g dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Montrer que g conserve la trace et le déterminant.

PROBLÈME 2

Dans ce problème, on étudie l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie I - Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

13. Calculer u_0, u_1, u_2.
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
15. Établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$, pour $n \geq 1$.
16. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
    Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
17. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
18. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
19. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Partie II - Étude d'une fonction définie par une somme de série

20. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que la série $\sum u_n x^n$ converge.

Dans la suite on pose pour tout $x \in]-1,1[$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

21. Établir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{1 - x\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

22. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{1 - x\cos(t)}\,\mathrm{d}t \right| \leq M$$

    En déduire l'égalité $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$.

23. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\,\mathrm{d}u$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
24. En déduire l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.

<u>PROBLÈME 3</u> : Optimisation du choix d'une place de parking

Présentation générale

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue.

Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.

Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]01[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k : « la k-ième place est libre. »

Partie I - Dérivées de la série géométrique

25. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum nx^{n-1}$ converge si, et seulement si, $x \in]-1, 1[$.

26. Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

27. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ converge si, et seulement si, $x \in]-1, 1[$.

28. Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Partie II - Loi de X

29. Vérifier que pour tout entier $n \geq s$: $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-s}p$.
30. Montrer que la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge.

    On pose alors $E(X) = \displaystyle\sum_{n=s}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)$. Vérifier que $E(X) = \dfrac{1}{p} + s - 1$.
31. Montrer que la série $\sum n^2\mathbb{P}(X = n)$ converge.

    On pose alors $E(X^2) = \displaystyle\sum_{n=s}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X = n)$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Vérifier que $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Partie III - Calcul de la distance moyenne à l'arrivée

On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d. Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.

On admettra que la distance moyenne à l'arrivée est $D_s = \displaystyle\sum_{n=s}^{+\infty} |n-d|\mathbb{P}(X = n)$ (on admettra aussi que D_s existe).

Pour simplifier, on prend $p = \dfrac{1}{10}$ dans cette partie.

32. Établir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \sum_{n=s}^{d}(d-n)\mathbb{P}(X=n)$ et $S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)\mathbb{P}(X=n)$.

33. Soit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \geq 0,\ u_k = \sum_{i=0}^{k}(k-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i$.

    Montrer que $\forall k \geq 0,\ u_{k+1} = \frac{9}{10}u_k + k + 1$.

    On pourra effectuer un changement d'indice $j = i - 1$.

34. Montrer, par récurrence, que pour tout $k \geq 0$, $u_k = 10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k$.

35. Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s} puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s.

36. Justifier que $S_2 - S_1 = \sum_{n=s}^{+\infty}(n-d)\mathbb{P}(X=n)$.

    En déduire la valeur de S_2 puis D_s.

Partie IV - Optimisation

On admet que, pour tout $p \in]0,1[$, $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

37. Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

38. Étudier le signe de $D_{s+1} - D_s$.

    En déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à α, avec $\alpha = d + \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}$.

39. Dans cette question, on s'intéresse à l'exemple pour lequel $p = \frac{1}{10}$. En utilisant l'encadrement $2^{-1/6} < 0,9 < 2^{-1/7}$, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ?

FIN