EXERCICE 1

1. $X(\Omega)=\{1;2;3;4\}$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1;2;3;4\})$

$Y(\Omega)=\{0;1;2\}$

$\mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Y=0\})=\mathbb{P}(X=1)\times \mathbb{P}_{\{X=1\}}(Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Y=1\})=\mathbb{P}(X=1)\times \mathbb{P}_{\{X=1\}}(Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Y=2\})=0$ (on ne peut pas avoir 2 rouges en ne piochant qu'une boule)

$\mathbb{P}(\{X=2\}\cap\{Y=0\})=\mathbb{P}(X=2)\times \mathbb{P}_{\{X=2\}}(Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{\binom{2}{0}\times\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

de même : $\mathbb{P}(\{X=2\}\cap\{Y=1\})=\frac{1}{4}\times\frac{2\times 2}{6}=\frac{4}{24}$

$\mathbb{P}(\{X=2\}\cap\{Y=2\})=\frac{1}{4}\times\frac{1\times 1}{6}=\frac{1}{24}$

$\mathbb{P}(\{X=3\}\cap\{Y=0\})=0$ (si on pioche 3 boules on obtient au moins 1 rouge)

$\mathbb{P}(\{X=3\}\cap\{Y=1\})=\mathbb{P}(X=3)\times \mathbb{P}_{\{X=3\}}(Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}}=\frac{1}{4}\times\frac{2\times 1}{4}=\frac{2}{16}$

de même $\mathbb{P}(\{X=3\}\cap\{Y=2\})=\frac{1}{4}\times\frac{1\times 2}{4}=\frac{2}{16}$

$\mathbb{P}(\{X=4\}\cap\{Y=0\})=0$

$\mathbb{P}(\{X=4\}\cap\{Y=1\})=0$

$\mathbb{P}(\{X=4\}\cap\{Y=2\})=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$

On obtient le tableau :

$Y \backslash X$	1	2	3	4
0	$1/8$	$1/24$	0	0
1	$1/8$	$4/24$	$1/8$	0
2	0	$1/24$	$1/8$	$1/4$

2. Pour $j \in \{0; 1; 2\}$ la formule des probabilités totales appliquée avec le sce $(\{X = k\})_{1 \leq k \leq 4}$ donne :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(Y = j)$$

On trouve :

j	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=j)$	$\frac{4}{24}$	$\frac{10}{24}$	$\frac{10}{24}$

3. Pour $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ on a :

$$\mathbb{P}_{\{Y=2\}}(X = k) = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = 2\})}{\mathbb{P}(Y = 2)}$$

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}_{\{Y=2\}}(X=k)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

4. $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=0}^{2} j \times \mathbb{P}(Y = j) = 0 \times \frac{4}{24} + 1 \times \frac{10}{24} + 2 \times \frac{10}{24} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

EXERCICE 2

1. $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

$\{X=1\}$ = " on obtient BB.... B ou NN.... N "

donc $\boxed{\mathbb{P}(X=1) = p^n + q^n}$ par additivité de $\mathbb{P}$ et indépendance des tirages

$\{X=n\}$ = " on obtient BNBN.... ou NBNB..... "

si n est pair : $\mathbb{P}(X=n) = p^{n/2} \times q^{n/2} + q^{n/2} \times p^{n/2}$

si n est impair : $\mathbb{P}(X=n) = p^{\frac{n+1}{2}} \times q^{\frac{n-1}{2}} + q^{\frac{n+1}{2}} \times p^{\frac{n-1}{2}}$

$= p^{\frac{n-1}{2}} \times q^{\frac{n-1}{2}} \times (p+q) = p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}}$

dans les deux cas : $\boxed{\mathbb{P}(X=n) = p^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$

2. $Y_i(\Omega) = \{0; 1\}$ donc Y_i suit une loi de Bernoulli.

$\mathbb{P}(Y_i = 1) = p \times q$ par indépendance des tirages.

Donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$

De même $Z_j \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$

3. $\sum_{i=2}^{n} Y_i$ est égal au nombre de fois où on est passé d'une série de B à une série de N.

$\sum_{j=2}^{n} Z_j$ est égal au nombre de fois où on est passé d'une série de N à une série de B.

Donc :

$\sum_{i=2}^{n} Y_i + \sum_{j=2}^{n} Z_j$ est égal au nombre de fois où l'on a changé de série.

Donc : $X = \underbrace{1}_{\substack{\text{il faut aussi} \\ \text{comptabiliser la 1ère série}}} + \sum_{i=2}^{n} Y_i + \sum_{j=2}^{n} Z_j$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = 1 + \sum_{i=2}^{n} E(Y_i) + \sum_{j=2}^{n} E(Z_j)$$

$$\boxed{E(X) = 1 + 2(n-1)pq}$$

EXERCICE 3

1. On a $r_n \in \{0;1;2;3;4\}$

donc $0 \leq a_n \leq \frac{4}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

Or la série $\sum_1 \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

donc la série $\sum_1 \frac{4}{n^2}$ converge.

Par comparaison des termes généraux de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ converge}}$.

2. $$S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} a_k = \sum_{p=1}^{n} a_{5p} + \sum_{p=0}^{n-1} a_{5p+1} + \sum_{p=0}^{n-1} a_{5p+2}$$

on groupe les termes en fonction de la valeur de k modulo 5

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} a_{5p+3} + \sum_{p=0}^{n-1} a_{5p+4}$$

$$= 0 + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(5p+1)(5p+2)} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{2}{(5p+2)(5p+3)} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{3}{(5p+3)(5p+4)}$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} \frac{4}{(5p+4)(5p+5)}$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5p+1} - \frac{1}{5p+2}\right) + 2 \times \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5p+2} - \frac{1}{5p+3}\right)$$

$$+ 3 \times \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5p+3} - \frac{1}{5p+4}\right) + 4 \times \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5p+4} - \frac{1}{5p+5}\right)$$

Donc :

$$S_{5n} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{5p+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{5p+2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{5p+3} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{5p+4}$$

$$- \frac{4}{5} \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1}}_{\overset{\text{def}}{=} H_n}$$

$$= \left(H_{5n} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{5p} \right) - \frac{4}{5} H_n$$

$$= H_{5n} - \frac{1}{5} H_n - \frac{4}{5} H_n$$

donc $\boxed{S_{5n} = H_{5n} - H_n}$

3.(a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$

$-\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ie $\ln(n-1) - \ln(n) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\boxed{w_n = \frac{1}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

3.(b) Donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

Avec le même raisonnement qu'en 1. on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum w_n \text{ converge}}$.

3.(c) On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \geq 1$.

Alors pour $n \geq 2$:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = -w_n$$

Donc la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge.

Par dualité suite-séries on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

On pose $\gamma \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Alors $u_n = \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$

donc $\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$

4.(a) Pour tout $t \in [n, n+1]$ on a : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$

donc par croissance de l'intégrale : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n}$

donc $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}}$ pour $n \geq 1$

4.(b) Par somme d'inégalités on obtient pour $n \geq 1$:

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ie $\ln(n+1) \leq H_n$

et pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$$

ie $H_n - 1 \leq \ln(n)$

Donc pour $n \geq 2$: $\boxed{\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)}$

4.(c) On pose à nouveau $u_n = H_n - \ln(n)$

On a alors pour $n \geq 2$: $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$

ln croissante

Donc (u_n) est minorée.

De plus : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0$

Donc (u_n) est décroissante.

Le théorème de la limite monotone nous donne alors que (u_n) est convergente et on retrouve le résultat de 3.(c).

5. On pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Alors $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$.

Par suite extraite : $S_{5n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$

donc $H_{5n} - H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$

Mais $H_{5n} - H_n = \ln(5n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$

$= \ln(5) + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$

donc $H_{5n} - H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(5)$

Par unicité de la limite : $S = \ln(5)$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(5)}$

(10)

6. $S_{5n} = H_{5n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{1}{4n} \times \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{k}{4n}}$$

or comme $x \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{4}+x}$ est continue sur $[0,1]$

on a : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{\frac{1}{4}+t} = \left[\ln\left(\left|\frac{1}{4}+t\right|\right)\right]_0^1$

$$= \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \ln(5)$$

Par suite extraite :

$$\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{k}{4n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(5)$$

Donc $S_{5n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(5)$

Avec le même raisonnement qu'à la question précédente

on en conclut que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(5)$.