

①

1. (a) Au bout de 1 tirage on a eu un seul numéro.

Donc $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = d_1 = 0$.

1. (b) Au bout de 2 tirages on eu en tout un ou deux numéros.

Donc $c_2 = d_2 = 0$

A_2 est réalisé si on a eu 2 fois la boule 1 ou 2 fois la boule 2 ou 2 fois la boule 3 ou 2 fois la boule 4.

Donc Card $A_2 = 4$.

Comme les tirages sont faits avec remise: $P(A_2) = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$

donc $a_2 = \frac{1}{4}$

De plus $b_2 = 1 - a_2 = \frac{3}{4}$

On peut aussi trouver ce résultat par dénombrement:

Card $(B_2) = A_4^2 = 4 \times 3$ donc $b_2 = \frac{4 \times 3}{4^2} = \frac{3}{4}$

1.(c) A_n est réalisé si on tire n fois
la boule 1 ou ... ou n fois la boule 4.

donc $\text{card } A_n = 4$

Comme on fait n tirages avec remise :

$$P(A_n) = \frac{4}{4^n} \quad \text{ie} \quad \boxed{d_n = \frac{1}{4^{n-1}}}$$

1.(d) On cherche $P_{B_3}(B_2)$.

D'après la formule de Bayes :

$$P_{B_3}(B_2) = \frac{P_{B_2}(B_3) \times P(B_2)}{P(B_3)}$$

$$\text{or } P_{B_2}(B_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{on tire un n.º égal à un des 2 précédents})$$

$$P(B_2) = \frac{3}{4}$$

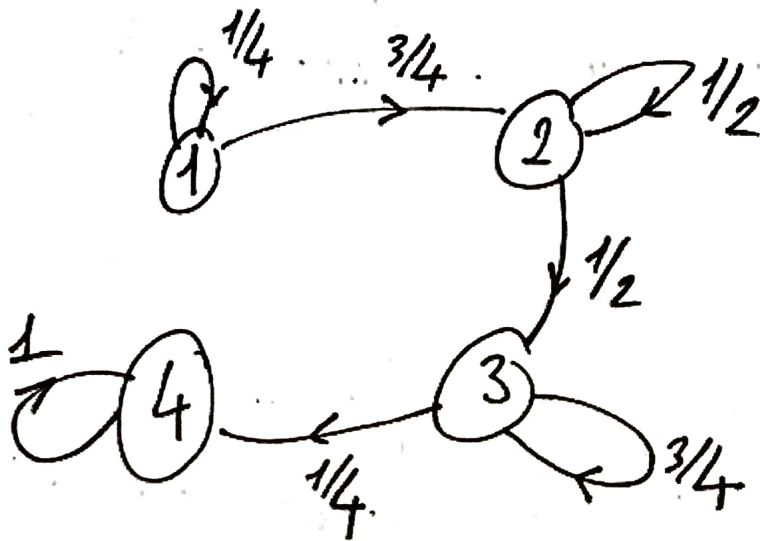
$$\text{et } d_3 = \frac{1}{16}, \quad d_3 = 0, \quad c_3 = \frac{A_4^3}{4^3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{4^3} = \frac{3}{8}$$

$$\text{donc } b_3 = P(B_3) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

$$\text{Finalement } P_{B_3}(B_2) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

3

2. (a)



2. (b) Pour n fixé la famille (A_n, B_n, C_n, D_n) est un s.c.e. donc on peut utiliser la formule des probabilités totales:

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \cdot P_{C_n}(A_{n+1}) + P(D_n) \cdot P_{D_n}(A_{n+1})$$

$$\text{ie } a_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot a_n + 0 \cdot b_n + 0 \cdot c_n + 0 \cdot d_n$$

De la même manière on trouve:

$$b_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot a_n + \frac{1}{2} \cdot b_n + 0 \cdot c_n + 0 \cdot d_n$$

$$c_{n+1} = 0 \cdot a_n + \frac{1}{2} \cdot b_n + \frac{3}{4} \cdot c_n + 0 \cdot d_n$$

$$d_{n+1} = 0 \cdot a_n + 0 \cdot b_n + \frac{1}{4} \cdot c_n + 1 \cdot d_n$$

Ces quatre relations donnent: $U_{n+1} = A \cdot U_n$

3. (a) On utilise la méthode du système linéaire.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ -3x_1 + x_2 = y_2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = y_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = 3y_1 + y_2 \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \end{cases}$$

donc P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (b) On trouve $D = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc D est diagonale

3. (c) Par récurrence immédiate: $D = P^{-1} A P$
donne $A = P D P^{-1}$ puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

3. (d) Comme D est diagonale on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2^n & 0 & 0 \\ 3 & -2^{n+1} & 3^n & 0 \\ -1 & 2^n & -3^n & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 \times (2^n - 1) & 2^n & 0 & 0 \\ 3 \times (1 - 2^{n+1} + 3^n) & -2^{n+1} + 2 \times 3^n & 3^n & 0 \\ -1 + 3 \times 2^n - 3^{n+1} + 4^n & 2^n - 2 \times 3^n + 4^n & 4^n - 3^n & 4^n \end{pmatrix}$$

3. (e) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = A \cdot U_n$

donc par récurrence immédiate: $\forall n \geq 1, U_n = A^{n-1} \times U_1$

$$\text{or } U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc pour tout } n \geq 1: U_n = \frac{1}{4^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \times 2^{n-1} - 3 \\ 3 - 3 \times 2^n + 3^n \\ -1 + 3 \times 2^{n-1} - 3^n + 4^{n-1} \end{pmatrix}$$

4.(a) On en déduit que pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$b_n = \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}}$$

$$c_n = \frac{3}{4^{n-1}} - \frac{6}{4^{n-1}} + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$d_n = -\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{3}{2^{n-1}} - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 1$$

4.(b) Ce sont des sommes de suites géométriques.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 1$$

Au bout d'un grand nombre de lancers, on aura presque sûrement eu les 4 numéros.