Exercice 1

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

On note $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$

Alors $\lambda\vec{u} + \vec{v} = (\underbrace{\lambda x + x'}_{=X}, \underbrace{\lambda y + y'}_{=Y}, \underbrace{\lambda z + z'}_{=Z})$

Donc $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = (2X - Y - Z, X - Z, X - Y)$

$= (2\lambda x + 2x' - \lambda y - y' - \lambda z - z', \lambda x + x' - \lambda z - z', \lambda x + x' - \lambda y - y')$

$= \lambda.(2x - y - z, x - z, x - y) + (2x' - y' - z', x' - z', x' - y')$

$= \lambda. f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

De plus f est définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

2. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\vec{u} \in \text{Ker}(f) \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{u_1}})$

Comme $\vec{u_1} \neq \vec{0}$ la famille $(\vec{u_1})$ est une base de $\text{Ker}(f)$

3. On note $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

D'après le cours :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3})\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(2,1,1)}_{\vec{v_1}}, \underbrace{(-1,0,-1)}_{\vec{v_2}}, \underbrace{(-1,-1,0)}_{\vec{v_3}}\right)$$

Et on sait d'après le th du rang que :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

$$= 3 - 1 = 2$$

On remarque que : $-\vec{v_2} - \vec{v_3} = \vec{v_1}$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{v_2}, \vec{v_3})$

La famille $(\vec{v_2}, \vec{v_3})$ est donc génératrice minimale de $\mathrm{Im}(f)$ et est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$ donc f n'est pas injectif

et donc f n'est pas un automorphisme

Comme f est un endomorphisme et comme $\mathbb{R}^3$ est de dim finie alors f non injectif donne aussi f non surjectif.

5. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Alors $f(f(\vec{u})) = f(2x-y-z, x-z, x-y)$

$$= (4x-2y-2z-x+z-x+y,\ 2x-y-z-x+y,\ 2x-y+z-x+z)$$

$$= (2x-y-z,\ x-z,\ x-y) = f(\vec{u})$$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$: $f \circ f = f$

D'après le cours f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. On les a déterminés aux questions 3. et 4.

6. La projection associée est $g \overset{\text{def}}{=} id - f$.

Pour $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$g(x, y, z) = (x, y, z) - (2x-y-z, x-z, x-y)$$

$$= (-x+y+z, -x+y-z, -x+y+z)$$

7. $rg(f) = 2$ comme vu à la question 4.

Exercice 2

1. $\varphi(1+X+3X^2+2X^3-2X^4-X^5)=1-X+3X^2-2X^3-2X^4+X^5$

2. Soit $P\in\mathbb{K}_n[X]$. Alors $\deg(P)\leq n$.

$$\varphi(P)=P(-X) \text{ donc } \deg(\varphi(P))=\deg(P\circ(-X))$$
$$=\deg(P)\times\deg(-X)$$
$$=\deg(P)\times 1$$
$$=\deg(P)\leq n$$

donc $\varphi(P)\in\mathbb{K}_n[X]$.

Ainsi φ est définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Soient $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(P,Q)\in\mathbb{K}_n[X]^2$.

$$\varphi(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)\circ(-X)=\lambda.P(-X)+Q(-X)$$
$$=\lambda.\varphi(P)+\varphi(Q)$$

Donc φ est <u>linéaire</u>.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{K}_n[X].}$

3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

$$\varphi(\varphi(P)) = \varphi(P(-X)) = P(-(-X)) = P(X) = P$$

Donc $\varphi \circ \varphi = id_{\mathbb{K}_n[X]}$

Donc d'après le cours φ est une symétrie de $\mathbb{K}_n[X]$.

c'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\varphi - id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi + id)$.

Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi - id) &\iff (\varphi - id)(P) = 0_{\mathbb{K}_n[X]} \\ &\iff \varphi(P) - P = 0_{\mathbb{K}[X]} \\ &\iff P(X) = P(-X) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi - id) = \{P \in \mathbb{K}_n[X] ;\ P \text{ est pair}\}$

De même $\mathrm{Ker}(\varphi + id) = \{P \in \mathbb{K}_n[X] ;\ P \text{ est impair}\}$

4. Comme $\varphi \circ \varphi = id$: φ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ⑥

et $\varphi^{-1} = \varphi$.

Donc φ est injectif et surjectif.

Donc $Ker(\varphi) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ et $Im(\varphi) = \mathbb{K}_n[X]$

5. Donc d'après le cours :

$rg(\varphi) = dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.