Correction du DS1

Exercice 1

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $A\cup B = A\cup C$

but $A\cup\overline{B} = A\cup\overline{C}$

$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in A\cup\overline{B}$.

Alors $x\in A$ ou $x \notin B$.

Cas 1 si $x\in A$ alors $x \in A\cup\overline{C}$

Cas 2 si $x\notin A$. Alors $x\notin B$ puisque $x\in A\cup\overline{B}$

donc $x \in \overline{A}\cap\overline{B}$

donc $x \notin A\cup B$ (lois de Morgan)

donc $x \notin A\cup C$ (car $A\cup B = A\cup C$)

donc $x\notin C$

donc $x \in A\cup\overline{C}$.

Dans les 2 cas : $x\in A\cup\overline{C}$.

Ceci prouve que $A\cup\overline{B} \subseteq A\cup\overline{C}$.

$\boxed{\supseteq}$ Par symétrie du rôle de B et C on a de même $A\cup\overline{C}\subseteq A\cup\overline{B}$.

Ccl : $A\cup\overline{B} = A\cup\overline{C}$ par double-inclusion.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $A\cup\overline{B} = A\cup\overline{C}$

En utilisant $\Longrightarrow$ avec $(\overline{B},\overline{C})$ à la place de (B,C) on obtient $A\cup\overline{\overline{B}} = A\cup\overline{\overline{C}}$ ie $A\cup B = A\cup C$

Exercice 2

1. • Injectivité de f

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ tq $f(x_1) = f(x_2)$.

On a $x_1 + 1 = x_2 + 1$

donc $x_1 = x_2$

Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

• Surjectivité de f

Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1 \geq 1$

donc $f(x) \neq 0$.

Donc 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$ par f.

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

• Donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$.

• Injectivité de g

$g(0) = 0 = g(1)$ et $0 \neq 1$

donc $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$

- <u>Surjectivité de g</u>

Soit $z \in \mathbb{N}$ fixé qcq.

On pose $y = z + 1$.

Alors $y \in \mathbb{N}$ et comme $y \geq 1$ on a $g(y) = z + 1 - 1$
$= z$

Donc $\boxed{g \text{ est surjective}}$

- Donc $\boxed{g \text{ n'est pas bijective}}$

<u>2.</u> Pour tout $x \in \mathbb{N}$:

$$g(f(x)) = g(x+1) = x+1-x \quad \text{car } x+1 \geq 1$$
$$= x$$

Donc $\boxed{g \circ f = id_{\mathbb{N}}}$

Pour tout $y \in \mathbb{N}$:

$$f(g(y)) = \begin{cases} f(0) & \text{si } y = 0 \\ f(y-1) & \text{si } y \geq 1 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } y \geq 1 \end{cases}}$$

Exercice 3

1. C'est l'exercice 14 du TD 1.

2. On suppose $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ surjectives et $f \circ h \circ g$ injective.

<u>but</u> f, g, h bijectives

Comme $h \circ g \circ f$ est surjective on sait d'après 1.(b) que <u>h est surjective</u>.

De même $g \circ f \circ h$ surjective donne <u>g surjective</u>

Comme $f \circ h \circ g$ est injective on sait d'après 1.(a) que <u>g est injective</u>.

Donc $\boxed{g \text{ est bijective}}$. Elle admet donc une fonction réciproque g^{-1} elle aussi bijective.

Comme $f \circ h = g^{-1} \circ (g \circ f \circ h)$ on a donc $f \circ h$ surjective et donc <u>f surjective</u>.

Comme $f \circ h = (f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ on a $f \circ h$ injective et donc <u>h injective</u>.

Donc $\boxed{h \text{ est bijective}}$. Elle admet donc une fonction réciproque h^{-1} elle aussi bijective.

Alors $f = (f \circ h) \circ h^{-1}$ donc f injective.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

Exercice 4

1. Le chiffre 1 peut être en premier à gauche, les autres chiffres étant quelconques, différents de 1. Il y a 9^{n-1} possibilités.

- Si le chiffre 1 n'est pas en premier à gauche, il y a $n-1$ façons de placer ce chiffre 1. Le premier chiffre à gauche est quelconque entre 2 et 9. Les autres chiffres sont entre 0 et 9 (sauf le chiffre 1).

Donc il y a $(n-1)8 \cdot 9^{n-2}$ possibilités

- Au total : $9^{n-1} + (n-1) \times 8 \times 9^{n-2} = (8n+1) \times 9^{n-2}$

2.(a) Pour chaque couple d'éléments de E il faut choisir s'ils sont en relation ou non : 2 possibilités.
Il y a n^2 couples.

Donc au total 2^{n^2} relations.

2.(b) Cette fois les couples (x,x) sont en relation.
Donc les 2 possibilités ne sont valides que pour les n^2-n autres couples.

Donc il y a 2^{n^2-n} relations réflexives.

2.(c) Si on note $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ les 2 possibilités sont à choisir pour les couples $(x_i; x_j)$ tels que $i \leq j$.

Il y en a n tq $i=j$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tels que $i<j$.

Donc il y en a $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.

Donc il y a $2^{(n^2+n)/2}$ relations symétriques