Correction DS3

EXERCICE 1

1. g_1 est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} g_1(t) &= e^{-t} \\ g_1'(t) &= -e^{-t} \\ g_1''(t) &= e^{-t} \\ g_1'''(t) &= -e^{-t} \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g_1'''(t) + 5g_1''(t) + 9g_1'(t) + 5g_1(t) = -e^{-t} + 5e^{-t} - 9e^{-t} + 5e^{-t} = 0$$

Donc g_1 <u>est solution de</u> (H).

2. g_2 est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions qui le sont) et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} g_2(t) &= e^{-2t} \times \cos(t) \\ g_2'(t) &= -2e^{-2t} \times \cos t - e^{-2t} \times \sin t = -e^{-2t} \times (2\cos t + \sin t) \\ g_2''(t) &= 2e^{-2t} \times (2\cos t + \sin t) - e^{-2t} \times (-2\sin t + \cos t) \\ &= e^{-2t} \times (3\cos t + 4\sin t) \\ g_2'''(t) &= -2e^{-2t} \times (3\cos t + 4\sin t) + e^{-2t} \times (-3\sin t + 4\cos t) \\ &= e^{-2t} \times (-2\cos t - 11\sin t) \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g_2'''(t) + 5g_2''(t) + 9g_1'(t) + 5g_1(t) = e^{-2t} \times (-2\cos t - 11\sin t + 15\cos t + 20\sin t - 18\cos t - 9\sin t + 5\cos t)$$

$$= 0$$

Donc g_2 <u>est solution de (H)</u>.

<u>3.</u> La fonction $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3$ est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car combinaison linéaire de fonctions qui le sont. De plus :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3)'''(t) + 5(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3)''(t) + 9(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3)'(t) + 5(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3)(t)$$

$$= \alpha_1 g_1'''(t) + \alpha_2 g_2'''(t) + \alpha_3 g_3'''(t) + 5\alpha_1 g_1''(t) + 5\alpha_2 g_2''(t) + 5\alpha_3 g_3''(t) + 9\alpha_1 g_1'(t) + 9\alpha_2 g_2'(t) + 9\alpha_3 g_3'(t) + 9\alpha_1 g_1(t) + 9\alpha_2 g_2(t) + 9\alpha_3 g_3(t)$$

$$= \alpha_1\left(g_1'''(t) + 5g_1''(t) + 9g_1'(t) + 5g_1(t)\right) + \alpha_2\left(g_2'''(t) + 5g_2''(t) + 9g_2'(t) + 5g_2(t)\right) + \alpha_3\left(g_3'''(t) + 5g_3''(t) + 9g_3'(t) + 5g_3(t)\right)$$

$$= \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 \times 0 + \alpha_3 \times 0 = 0$$

Donc <u>$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3$ est solution de (H)</u>.

<u>4.</u> Comme y est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ les fonctions y, y' et y'' sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc z est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = y'''(t) + 4y''(t) + 5y'(t)$$

$$\text{donc } z'(t) + z(t) = y'''(t) + 5y''(t) + 9y'(t) + 5y(t)$$

$$= 0$$

5. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = Ce^{-t}.$$

En posant $d_1 = \dfrac{C}{2}$ on a $\underline{d_1 \in \mathbb{R}}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2d_1 e^{-t}$$

---

6. * Equation homogène : $y'' + 4y' + 5y = 0$

$r^2 + 4r + 5 = 0$ donne $\Delta = -4$ puis $r = \dfrac{-4 \pm 2i}{2}$
$= -2 \pm i$

donc il existe d_2, d_3 réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_H(t) = e^{-2t} \times \left(d_2 \cos(t) + d_3 \sin(t)\right)$$
$$= d_2 g_2(t) + d_3 g_3(t)$$

* Solution particulière de l'équation complète :

On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = pe^{-t}$ où $p \in \mathbb{R}$.

On veut $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p''(t) + 4y_p'(t) + 5y_p(t) = 2d_1 e^{-t}$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $pe^{-t} - 4pe^{-t} + 5pe^{-t} = 2d_1 e^{-t}$

donc $2p = 2d_1$ donc $p = d_1$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = d_1 e^{-t} = d_1 g_1(t)$

* On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = d_1 g_1(t) + d_2 g_2(t) + d_3 g_3(t)$$

où d_1, d_2, d_3 sont des réels.

EXERCICE 2

1. $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0 - (0+0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{16}\left(e^{i4t} + 4e^{i2t} + 6 + 4e^{-i2t} + e^{-i4t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \left(\cos(4t) + 4\cos(2t) + 3\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t) + 2\sin(2t) + 3t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(0 + 0 + \frac{3\pi}{2} - (0+0+0)\right) = \boxed{\frac{3\pi}{16}}$$

2.(a) $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^{2n+2}\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos(t)^{2n}\,dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\cos(t)^2 - 1\right) \times \cos(t)^{2n}\,dt$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \times \cos(t)^{2n}\,dt = \boxed{-\int_0^{\pi/2} \sin(t) \times \sin(t)\cos(t)^{2n}\,dt}$$

2.(b) On pose $\begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v'(t) = \sin(t)\cos(t)^{2n} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v(t) = -\frac{1}{2n+1}\cos(t)^{2n+1} \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Par IPP :

$$I_{n+1} - I_n = -\left[-\frac{1}{2n+1}\sin(t)\cos(t)^{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(t) \times \frac{-1}{2n+1}\cos(t)^{2n+1}\,dt$$

$$= 0 - 0 - \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos(t)^{2n+2}\,dt = \boxed{\frac{-1}{2n+1} I_{n+1}}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ le prédicat

$$\text{"} I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{"}$$

Pour $n=0$ $\quad \frac{0!}{0^0 \times (0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = I_0$

donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel $P(n)$ est vrai.

Alors $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2n+1} I_{n+1}$ d'après 2.(b)

donc $\frac{2n+2}{2n+1} I_{n+1} = I_n$

$$\text{donc } I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{2n+1}{2 \times (n+1)} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ d'après } P(n)$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2 \times (n+1)^2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} \times ((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$ Donc $P(n+1)$ est vrai.

Ainsi $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

6

4. $J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi^3}{24}}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$I_n = \int_0^{\pi/2} 1 \times \cos(t)^{2n} dt$

On pose $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \cos(t)^{2n} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = -2n\sin(t)\cos(t)^{2n-1} \end{cases}$

u et v sont C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par IPP :

$I_n = \left[t\cos(t)^{2n}\right]_0^{\pi/2} + 2n\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos(t)^{2n-1} dt$

$= 0 - 0 + 2n\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos(t)^{2n-1} dt = 2n\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos(t)^{2n-1} dt$

On pose ensuite $\begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = \sin t \times \cos(t)^{2n-1} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v'(t) = -(2n-1)\cos^{2n-2}(t)\sin^2(t) + \cos^{2n}(t) \end{cases}$

u et v sont C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par IPP :

$I_n = 2n\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\pi/2} - 2n\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2} \times \left(-(2n-1)\cos^{2n-2}(t)\sin^2(t) + \cos^{2n}(t)\right) dt$

$= 0 - 0 + n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n-2}(t)\sin^2(t) dt - n\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t) dt$

$= n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n-2}(t) \times (1 - \cos^2(t)) dt - n.J_n$

$= n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n - nJ_n$

$= \boxed{n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n}$

6. D'après 3. on a :

$$\frac{2^{2n-1}\times(n!)^2}{n^2\times(2n)!}\times I_n = \frac{2^{2n-1}\times(n!)^2}{n^2\times(2n)!}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}\times(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2n^2}\times\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4n^2}}$$

Mais :

$$\frac{2^{2n-1}\times(n!)^2}{n^2\times(2n)!} I_n = n(2n-1)\frac{2^{2n-1}\times(n!)^2}{n^2\times(2n)!} J_{n-1} - 2n^2\frac{2^{2n-1}\times(n!)^2}{n^2\times(2n)!} J_n$$

$$= n(2n-1)\times\frac{2n^2}{n^2\times(2n)(2n-1)} K_{n-1} - K_n$$

$$= \boxed{K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}}$$

7. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{n=1}^{N}(K_{n-1}-K_n) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\pi}{4n^2}$$

En reconnaissant une somme télescopique :

$$K_0 - K_N = \frac{\pi}{4}\times\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N}$$

8. f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ f'(x) = \frac{\pi}{2}\sin(x)$

Or a $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ f'(x) > 0$.

Donc f est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc d'après le théorème de la bijection monotone elle est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $J \overset{def}{=} f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

$f(0) = 1 - \frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

donc $J = \left[1 - \frac{\pi}{2}, 1\right]$

9. Comme $0 \in J$: $\exists!\, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] ; \ f(\alpha) = 0$.

Comme f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

x	0		α		$\pi/2$
f		$-$	0	$+$	

$\alpha \neq 0$ car $f(0) \neq 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ car $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$

Donc $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

10. On pose $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ g(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - x$

g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On a $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x - 1 = -f(x)$

x	0		α		$\pi/2$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

$g(0) = 0 \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

Donc $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) \geqslant 0$

ie $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin x}$

11. On a $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos(t)^{2n}\, dt$

donc $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos(t)^{2n}\, dt$

mais $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{2n}(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t))\cos^{2n}(t)\, dt = I_n - I_{n+1}$

Donc $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \times (I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4} \times \frac{I_{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi^2}{4} \times \frac{I_n}{2n+2}$

En multipliant par $\frac{2^{2n} \times (n!)^2}{(2n)!}$ on a :

$$0 \leqslant K_n \leqslant \frac{2^{2n} \times (n!)^2}{(2n)!} \times \frac{\pi^2}{4} \times \frac{I_n}{2n+2} = \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$ d'après 3.

ie $\boxed{0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}}$

12. Par encadrement on a :

$$K_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Donc 7. donne $\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\pi^3}{24}$

et donc $\boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}}$