Correction du DS

EXERCICE 1

1. (a) comme $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$

et donc comme $1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ on a $n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Par continuité de exp en 1 : $e^x \xrightarrow[x \to 1]{} e$

donc $e^{n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$

ie $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e}$

1. (b) De même $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

donne $n.\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n}$ puis $n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc $\boxed{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$

1. (c) $n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2}$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\boxed{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

2. On sait que $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$

et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

Or $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\times\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-1\right)$

$= \sqrt{n}\times\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2n}$

$\boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}}$

De plus $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

D'autre part $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ et $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$

Et $e^x \underset{x \to 0}{\sim} 1$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$

Ainsi
$$\frac{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \times \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^3 \times e^{\frac{1}{n}}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2n} \times \frac{(-1)^n}{n}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^3 \times 1}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \, 4}{\sqrt{n}}$$

Or $\frac{(-1)^n \, 4}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc
$$\boxed{\frac{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \times \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^3 \times e^{1/n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

EXERCICE 2

1. $j^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ car $\frac{4\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3}\ [2\pi]$

$$\boxed{= \bar{j}}$$

Le discriminant de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$

est $\Delta = -3 < 0$ donc les racines sont :

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = j \text{ ou } \bar{j} = \boxed{j \text{ ou } j^2}$$

2. $\boxed{\Leftarrow}$ On sait que $Gl_n(\mathbb{C})$ est stable par le produit matriciel donc si A est inversible alors $A^2 = A \times A$ l'est aussi.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose A^2 inversible.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $AX = 0_{n,1}$

Alors $A^2X = A \times AX = A \times 0_{n,1} = 0_{n,1}$

Comme A^2 est inversible : $X = 0_{n,1}$

Ceci prouve que A est inversible.

3. On note $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$

Alors $C = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,3} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,3} & b_{3,2} \end{pmatrix}$

On déduit C de B en échangeant la 2ème colonne avec la 3ème.

4. $Q^2 = I_3$ donc $\boxed{Q \text{ est inversible}}$ et $\boxed{Q^{-1} = Q}$

5. $\boxed{V^2 = 3Q}$

Comme Q est inversible, V^2 l'est aussi et d'après la question 2. $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

$V^2 = 3Q$ donne $(V^2)^{-1} = (3Q)^{-1}$

ie $(V^{-1})^2 = \frac{1}{3} Q^{-1} = \frac{1}{3} Q$

donc $V \times (V^{-1})^2 = \frac{1}{3} VQ$ ie $\boxed{V^{-1} = \frac{1}{3} VQ}$

6.

On a $V \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ a + jb + j^2c \\ a + j^2b + jc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+j^2)/2 \\ (1+j)/2 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = V^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ (1+j^2)/2 \\ (1+j)/2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ (1+j^2)/2 \\ (1+j)/2 \end{pmatrix}$

donc $a = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4+j+j^2}{2}\right) = \boxed{1/2}$

$b = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2+j^2+j^4+j+j^2}{2}\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2+2j+2j^2}{2} = \boxed{0}$

$c = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2+j+j^3+j^2+j^3}{2}\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4+j+j^2}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

EXERCICE 3

1. $f_n(0) = -1 < 0$

$f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 = \frac{3-e}{e} > 0$ car $2 < e < 3$

2. f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$:

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} + 3x^n(-2x)e^{-x^2}$

$= 3x^{n-1}e^{-x^2} \times (n - 2x^2)$

du signe de $n - 2x^2 = 2\left(\sqrt{\frac{n}{2}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{n}{2}} + x\right)$

x	0		$1\sqrt{n/2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	-1	$\nearrow$		$\searrow$	-1

$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 3\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} = 3\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$

On sait par croissances comparées que $t^{\frac{n}{2}}e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

et $x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc $(x^2)^{\frac{n}{2}}e^{-x^2} = x^n e^{-x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$

f_n est continue et strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

donc bijective de $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ vers $\left[f_n(0), f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$

Comme $1 \in [0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ on a : $f_n(1) \leq f_n(\sqrt{\frac{n}{2}})$

donc $f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) > 0$

Comme $f_n(0) < 0$ on a $0 \in [f_n(0), f_n(\sqrt{\frac{n}{2}})]$

Donc $\exists ! u_n \in [0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$; $f_n(u_n) = 0$

De même $\exists ! v_n \in]\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$; $f_n(v_n) = 0$

Donc sur $[0, +\infty[$, f_n s'annule en deux réels u_n et v_n

vérifiant $0 < u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}} < v_n$ (car $f_n(0) \neq 0$).

Comme $f_n(1) > 0 = f_n(u_n)$ on a $1 > u_n$.

donc $\boxed{0 < u_n < 1 \leq \sqrt{\frac{n}{2}} < v_n}$

3. Comme $\sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ on a d'après le théorème

de minoration : $\boxed{v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$

4.(a) On a $f_n(u_n) = 0$

donc $3u_n^n e^{-u_n^2} = 1$

donc $\boxed{e^{u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}}$

4.(b) $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1} e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$

4.(c)
Comme u_n et u_{n+1} sont dans $[0,1]$ et comme f_{n+1} est strictement croissante sur cet intervalle (car $[0,1] \subseteq [0, \sqrt{(n+1)/2}\,]$) on a : $u_n < u_{n+1}$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

4.(d) Donc (u_n) est croissante et majorée par 1.
Donc $\boxed{\text{elle converge}}$ vers ℓ tq $\ell \leq 1$.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ on a $\ell \in [0,1]$.

5.(a) On a :

$$\begin{aligned} g_n(x) = 0 &\iff \ln 3 + n \cdot \ln(x) = x^2 \\ &\iff \ln(3x^n) = x^2 \\ &\iff 3x^n = e^{x^2} \\ &\iff 3x^n e^{-x^2} = 1 \\ &\iff f_n(x) = 0 \end{aligned}$$

5.(b) On suppose $\ell \neq 1$ donc $0 \leq \ell < 1$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_n) = 0$ donc $g_n(u_n) = 0$
donc $n \ln(u_n) = u_n^2 - \ln 3$

Mais $u_n^2 - \ln 3 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell^2 - \ln(3) \in \mathbb{R}$

or $n \times \ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ (si $l=0$ ou si $0<l<1$) 10

c'est absurde : on a donc $l=1$

Ainsi $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

5.(c) On a :

$\forall n \geqslant 2$, $\ln(3) + n\ln(1+w_n) - (1+w_n)^2 = 0$

donc $n\ln(1+w_n) = -\ln 3 + (1+w_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(3)+1$

or $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$

donc $n.\ln(1+w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nw_n$

Donc $nw_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\ln 3$

donc $nw_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1-\ln(3)$ donc $\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\ln(3)}{n}}$