Correction du DS5

Exercice 1

1.(a) Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $\varphi(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\tan(x)}$

tan est continue sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

donc sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et elle ne s'annule pas sur cet intervalle.

arctan est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Donc par quotient : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur }]0, \frac{\pi}{2}[}$.

1.(b) $\varphi(0) = a$

et pour $x \neq 0$: $\varphi(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\tan(x)} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{x \to 0}{\sim} 1$

donc $\varphi(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Donc : φ est continue en 0 <u>ssi</u> $\boxed{a = 1}$.

1.(c) $\arctan(x) \xrightarrow[x \to \pi/2]{} \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}_+^*$

$\tan(x) \xrightarrow[x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}]{} +\infty$

Donc $\varphi(x) \xrightarrow[x \overset{<}{\to} \pi/2]{} 0$

Donc $\boxed{\text{on peut prolonger } \varphi \text{ par continuité sur } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ en posant } \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0}$

2. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$ il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = \sup_{[0,1]}(f) = \max_{[0,1]}(f)$

De même il existe $b \in [0,1]$ tel que

$$g(b) = \sup_{[0,1]}(g) = \max_{[0,1]}(g) \overset{\text{par hyp}}{=} \sup_{[0,1]}(f) = f(a)$$

On définit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,1]$, $h(x) = f(x) - g(x)$

Alors h est continue sur $[0,1]$.

$$h(a) = f(a) - g(a) = \sup_{[0,1]}(g) - g(a) \geq 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - \sup_{[0,1]}(f) \leq 0$$

Comme $a \in [0,1]$ et $b \in [0,1]$ alors $[a,b] \subseteq [0,1]$

et h est continue sur $[a,b]$.

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, et comme h change de signe sur $[a,b]$, alors h s'annule sur $[a,b]$ donc sur $[0,1]$.

Ainsi $\boxed{\exists x_0 \in [0,1],\ f(x_0) = g(x_0)}$

Exercice 2

1.(a) $P_1(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i) - (X-i)\right) = \boxed{1}$

$$P_2(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^2 - (X-i)^2\right) = \frac{1}{2i}(2X)\times(2i) = \boxed{2X}$$

$$P_3(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^3 - (X-i)^3\right) = \frac{1}{2i}\left(X^3 + 3iX^2 - 3X - i - (X^3 - 3iX^2 - 3X + i)\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(6iX^2 - 2i\right) = \boxed{3X^2 - 1}$$

1.(b) $(X+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k X^{n-k}$ d'après la formule du binôme

$$(X-i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-i)^k X^{n-k}$$

donc $(X+i)^n - (X-i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \left[i^k - (-i)^k\right] X^{n-k}$

mais $i^k - (-i)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ 2i^k & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$

si k impair alors $k = 2p+1$ avec $p \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right]\!\right]$

et $i^k = i \times (-1)^p$

donc $(X+i)^n - (X-i)^n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \times 0 \times X^{n-2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} 2i(-1)^p X^{n-2p-1}$

$$= 2i \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p X^{n-2p-1}$$

Donc $\boxed{P_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p X^{n-2p-1} \in \mathbb{R}[X]}$

1.(c) $(X+i)^n = X^n + niX^{n-1} +$ termes de degré $\leq n-2$

$(X-i)^n = X^n - niX^{n-1} +$ termes de degré $\leq n-2$

donc $P_n(X) = nX^{n-1} +$ termes de degré $\leq n-2$

Donc $\boxed{\deg(P_n) = n-1}$ et $\boxed{\mathrm{cd}(P_n) = n}$.

1.(d) $P_n(-X) = \frac{1}{2i}\left((-X+i)^n - (-X-i)^n\right)$

$= \frac{1}{2i}\left((-1)^n(X-i)^n - (-1)^n(X+i)^n\right)$

$= (-1)^{n+1} \times P_n(X)$

Donc $\boxed{P_n \text{ est pair si } n \text{ est impair et } P_n \text{ est impair si } n \text{ est pair.}}$

2.(a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-i| = |z+i|$.

On note $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $|z-i|^2 = a^2 + (b-1)^2$ et $|z+i|^2 = a^2 + (b+1)^2$

Donc $a^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2$

ie $a^2 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + b^2 + 2b + 1$

ie $-2b = 2b$

ie $b = 0$

Donc $\boxed{z \in \mathbb{R}.}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P_n.

Alors $P_n(z) = 0$.

Donc $(z+i)^n = (z-i)^n$.

On passe au module : $|(z+i)^n| = |(z-i)^n|$

donc : $|z+i|^n = |z-i|^n$

donc $\sqrt[n]{|z+i|^n} = \sqrt[n]{|z-i|^n}$ puisque $|z+i|^n$ et $|z-i|^n$ sont des réels positifs

donc $|z+i| = |z-i|$

donc $z \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $\boxed{\text{toutes les racines de } P_n \text{ sont réelles}}$.

2.(b) Soit $x \in \mathbb{C}$.

$P_n(x) = 0 \iff (x+i)^n = (x-i)^n$

$\iff \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 1$

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \ \frac{x+i}{x-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

Or pour $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$\frac{x+i}{x-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \iff x+i = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \times (x-i)$

$\iff x \times \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$

$\underset{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1}{\iff} x = -i \times \frac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$

et pour $k = 0$: $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$ donc l'équation $\frac{x+i}{x-i} = 1$ n'a pas de solution.

Ainsi :

$$P_n(x)=0 \iff \exists k\in[\![1,n-1]\!],\; x=-i\times\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

Pour $k\in[\![1,n-1]\!]$:

$$\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}=\frac{\cancel{e^{i\frac{k\pi}{n}}}}{\cancel{e^{i\frac{k\pi}{n}}}}\times\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}+e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{-i\frac{k\pi}{n}}-e^{i\frac{k\pi}{n}}}=\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

$$=i\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Donc :

$$\boxed{P_n(x)=0 \iff \exists k\in[\![1,n-1]\!],\; x=\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

2.(c) Comme cotan est injective sur $]0,\pi[$ les reels $\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k\in[\![1,n-1]\!]$, sont $n-1$ racines distinctes de P_n. Comme $\deg(P_n)=n-1$ ce sont des racines simples.

Donc : $$\boxed{P_n(X)=n\times\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$$

3.(a) Pour tout $n\geq 1$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}\geq 0$$

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{-1}{n(n+1)^2}\leq 0$$

Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

De plus $v_n-u_n=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Donc $\boxed{(u_n)_{n\geq 1} \text{ et } (v_n)_{n\geq 1} \text{ sont adjacentes}}$.

3.(b) D'après le théorème de suites adjacentes, elles convergent vers un même limite α.

3.(c) On a $\forall n \geq 1,\ u_n \leq \alpha \leq v_n$

donc $\forall n \geq 1,\ 0 \leq \alpha - u_n \leq v_n - u_n = \frac{1}{n}$

donc $\boxed{\forall n \geq 1,\ |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{n}}$

Pour $n = 10^5$, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

4.(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'entier $2n+1$ est impair donc d'après 1.(d) le polynôme P_{2n+1} est pair de degré $2n$.

Il se note donc $P_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{2k}$ où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\boxed{\text{Si on pose } R_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X] \quad \text{alors } P_{2n+1}(X) = R_n(X^2).}$$

4.(b) Comme $\deg(P_{2n+1}) = 2n$ on a $a_n \neq 0$

donc $\deg(R_n) = n$ ie $\boxed{d_n = n}$

On a vu que $P_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)}$

Donc $R_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k}$

$= \binom{2n+1}{1} X^n + \binom{2n+1}{3}(-1) X^{n-1} +$ termes de degré $\leq n-2$

$= (2n+1) X^n - \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} X^{n-1} +$ termes de deg $\leq n-2$

Donc le coefficient de X^n est $2n+1$

et celui de X^{n-1} est $-\frac{(4n^2-1)n}{3}$.

4.(c) Pour $z \in \mathbb{C}$:

$R_n(z^2) = 0 \iff P_{2n+1}(z) = 0$

$\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!] ; z = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

Donc les réels $\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, 2n]\!]$ sont

des racines de R_n.

Or $\deg(R_n) = n$.

Et pour $k \in [\![1, n]\!]$ les réels $\frac{k\pi}{2n+1}$ sont 2 à 2 $\neq$

et dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$

Or sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ la fonction cotan^2 est injective

car strictement décroissante. En effet elle est dérivable

sur cet intervalle et:

$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \ (\operatorname{cotan}^2)'(x) = \left(\frac{1}{\tan^2}\right)'(x) = \frac{-2(1+\tan^2 x)}{\tan^3(x)} < 0$

Donc les réels $\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont n racines distinctes de R_n.

Ce sont donc exactement les racines de R_n et elles sont toutes simples.

Donc $\boxed{R_n(X) = (2n+1) \times \prod_{k=1}^{n} \left(X - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$

4.(d) En identifiant les coefficients de X^{n-1} des deux côtés de cette égalité :

$$-\frac{n(4n^2-1)}{3} = -(2n+1)\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}}$

5.(a) * On sait que $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(\theta) > 0$

* Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on pose $\varphi(\theta) = \sin(\theta) - \theta$.

φ est dérivable et $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi'(\theta) = \cos(\theta) - 1 < 0$

θ	0	$\pi/2$
φ	0	$\searrow$

donc $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi(\theta) < 0$ ie $\sin(\theta) < \theta$

* Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on pose $\varphi(\theta) = \tan(\theta) - \theta$

φ est dérivable et $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) - 1$
$= \tan^2(\theta) > 0$

Donc

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
ψ	0	$\nearrow$

donc $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\psi(\theta) > 0$
ie $\tan(\theta) > \theta$

* On a donc $\boxed{\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad 0 < \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)}$

5.(b) On a donc :

$$\forall \theta \in]0, \tfrac{\pi}{2}[, \quad 0 < \cotan(\theta) \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\text{donc } 0 < \cotan^2(\theta) \leq \frac{1}{\theta^2} \leq \frac{1}{\sin^2(\theta)}$$

$$\text{mais } \frac{1}{\sin^2(\theta)} = \frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = 1 + \cotan^2(\theta)$$

$$\text{donc } \boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad 0 < \cotan^2(\theta_k) \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq 1 + \cotan^2(\theta_k)}$$

car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a vu que $\theta_k \in]0, \frac{\pi}{2}[$

5.(c) Par somme d'inégalités :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{n(2n+2)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} = \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} u_n$$

$$\text{donc } \forall n \geq 1, \quad \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq u_n \leq \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

$$\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\pi^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^2}{12n^2}\pi^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$$

donc $\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\pi^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$

De même $\frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}\pi^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$

D'après le th d'encadrement : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$

Donc $\boxed{\alpha = \frac{\pi^2}{6}}$