Exercice 1

1. $X_1(\Omega) = \{1;2\}$

On a $\mathbb{P}(X_1=2) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1;2\})}$.

2. $X_2(\Omega) = \{1;2;3\}$

$(X_2=3) = B_1 \cap B_2$

donc $\mathbb{P}(X_2=3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$(X_2=1) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$

donc $\mathbb{P}(X_2=1) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Et donc $\mathbb{P}(X_2=2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Ainsi $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1;2;3\})}$

3.(a) $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]}$

Au pire des cas on ne pioche que des blanches, dans ce cas on en a ajouté n donc X_n prend la valeur $n+1$. Inversement si on ne pioche que des noires, l'urne reste à une seule boule blanche et donc X_n prend la valeur 1.

3.(b) On a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_n=k) \times \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=j)$$

Mais $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } k \neq j-1 \\ 1 - \frac{j}{n+2} & \text{si } k = j \quad \text{(on tire une noire dans une urne avec } j \text{ blanches)} \\ \frac{j-1}{n+2} & \text{si } k = j-1 \quad \text{(on tire une blanche parmi les } j-1\text{)} \end{cases}$ (2)

Donc $\mathbb{P}(X_{n+1}=j) = \mathbb{P}(X_n=j-1) \times \mathbb{P}_{(X_n=j-1)}(X_{n+1}=j)$
$+ \mathbb{P}(X_n=j) \times \mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1}=j)$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=j) = \frac{j-1}{n+2} \times \mathbb{P}(X_n=j-1) + \left(1 - \frac{j}{n+2}\right) \times \mathbb{P}(X_n=j)}$$

3.(c) Il s'agit de vérifier que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \times \mathbb{P}(X_n=1)$$

Mais $(X_n=1) = \overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_n}$

donc $\mathbb{P}(X_n=1) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{n-1}}}(\overline{B_n})$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n}{(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

et de même $\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{n+2}$

On a : $\frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \times \frac{1}{n+1}$

donc la formule est vraie.

3.(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat :

" $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$ "

C'est vrai pour $n=1$ d'après 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel H_n est vrai :

On a donc $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

et $\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{1}{n+1}$

On sait que $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ d'après 3.(a).

De plus pour $j \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ les questions 3.(b) et 3.(c) donnent :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \left(1 - \frac{j}{n+2}\right) \times \frac{1}{n+1} + \frac{j-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times (n+2 - j + j - 1) = \frac{1}{n+2}$$

Donc $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)$.

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)}$.

4. Avec le sce $((X_{n-1} = k))_{1 \leq k \leq n}$ la formule des probabilités

totales donne :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_{n-1}=k) \times P_{(X_{n-1}=k)}(B_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{k}{n+1}}$$

au n-ième tirage l'urne contient n+1 boules dont k blanches

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

5. $\mathbb{P}(B_1) = \boxed{\dfrac{N_1}{N}}$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2)$$

$$= \frac{N_1}{N} \times \frac{N_1+1}{N+1} + \frac{N_2}{N} \times \frac{N_1}{N+1}$$

$$= \frac{N_1(N_1+N_2+1)}{N(N+1)} = \boxed{\frac{N_1}{N}} \quad \text{car } N_1+N_2=N$$

6.(a) Si on ne tire que des noires alors X_n prend la valeur N_1 et si on ne tire que des noires alors X_n prend la valeur N_1+n.

Donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![N_1, N_1+n]\!]}$

6(b) La formule des probabilités totales avec le sce $\left((X_{n-1}=k)\right)_{N_1 \leq k \leq N_1+n-1}$ donne :

$$P(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k) \times P_{(X_{n-1}=k)}(B_n)$$

$$= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k) \times \underbrace{\frac{k}{N+n-1}}$$

on pioche une blanche dans une urne de $N+n-1$ boules dont k blanches

D'où $\boxed{(N-n+1) \times P(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k \times P(X_{n-1}=k)}$

6.(c).i. Sachant $B_n \cap [X_{n-1}=k]$: l'urne au début du n-ième tirage contient k boules blanches, et on en pioche une, donc au début du n-ième tirage elle en contient $k+1$ sur un total de N_1+n

Ainsi $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n \cap (X_{n-1}=k)) = \dfrac{k+1}{N+n}$

De même : $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid \overline{B_n} \cap (X_{n-1}=k)) = \dfrac{k}{N+n}$

6.(c).ii Comme $(B_n, \overline{B_n})$ est un sce la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(B_{n+1} \cap (X_{n-1}=k)) = \mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1} \cap (X_{n-1}=k)) + \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap B_{n+1} \cap (X_{n-1}=k))$$

$$= \mathbb{P}(B_n \cap (X_{n-1}=k)) \times \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n \cap (X_{n-1}=k))$$
$$+ \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap (X_{n-1}=k)) \times \mathbb{P}(B_{n+1} \mid \overline{B_n} \cap (X_{n-1}=k))$$

$$= \mathbb{P}(B_n \cap (X_{n-1}=k)) \times \frac{k+1}{N+n} + \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap (X_{n-1}=k)) \times \frac{k}{N+n}$$

Mais une nouvelle utilisation de la formule des probabilités totales avec le sce $(B_n, \overline{B_n})$ donne :

$$\mathbb{P}(X_{n-1}=k) = \mathbb{P}(B_n \cap (X_{n-1}=k)) + \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap (X_{n-1}=k))$$

donc $\mathbb{P}(B_n \cap (X_{n-1}=k)) = \mathbb{P}(X_{n-1}=k) - \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap (X_{n-1}=k))$

En réinjectant on trouve :

$$\boxed{\mathbb{P}(B_{n+1}\cap(X_{n-1}=k)) = \frac{k}{N+n}\mathbb{P}(X_{n-1}=k) + \frac{1}{N+n}\mathbb{P}(B_n\cap(X_{n-1}=k))}$$

(d) La formule des probabilités totales avec le sce $((X_{n-1}=k))_{N_1\leq k\leq N_1+n-1}$ donne :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}\mathbb{P}(B_{n+1}\cap(X_{n-1}=k))$$

$$= \frac{1}{N+n}\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}k\,\mathbb{P}(X_{n-1}=k) + \frac{1}{N+n}\times\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}\mathbb{P}(B_n\cap(X_{n-1}=k))$$

$$= \underbrace{\frac{N+n-1}{N+n}\mathbb{P}(B_n)}_{6.(b)} + \underbrace{\frac{1}{N+n}\mathbb{P}(B_n)}_{\text{formule des probabilités totales}} = \boxed{\mathbb{P}(B_n)}$$

7.(a) On a donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}(B_1)=\boxed{\frac{N_1}{N}}$

7.(b) La question 6.(b) donne alors :

$\forall n\geq 2$, $(N+n-1)\frac{N_1}{N} = \mathbb{E}(X_{n-1})$

donc $\boxed{\forall n\geq 1,\ \mathbb{E}(X_n) = \frac{N+n}{N}\times N_1}$

7.(c) On retrouve $\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+2}{2}$

ce qui est cohérent avec $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$.

Exercice 2

1. Soit P tq $n = \deg(P) \geq 1$.
Alors $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$

Donc :

$$\Phi(P) = (X^2 - 1) \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2} + (2X+1) \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

$$= n(n-1) a_n X^n + 2n a_n X^n + \text{monômes de degré} \leq n-1$$

$$= n(n+1) a_n X^n + \text{monômes de degré} \leq n-1$$

Comme $a_n \neq 0$ on a $\boxed{\deg(\Phi(P)) = n = \deg(P)}$

2. Φ est défini sur $\mathbb{R}[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.
Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Phi(\lambda P + Q) = (X^2-1) \times (\lambda P'' + Q'') + (2X+1) \times (\lambda P' + Q')$$

$$= \lambda \times \left[(X^2-1) P'' + (2X+1) P' \right] + (X^2-1) Q'' + (2X+1) Q'$$

$$= \lambda \times \Phi(P) + \Phi(Q)$$

Donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$

3. D'après 1 on a $\deg(P) \geq 1 \Longrightarrow \deg(\Phi(P)) \geq 1$
$\Longrightarrow \Phi(P) \neq 0$

Donc par contraposée : $\Phi(P) = 0 \Longrightarrow \deg(P) \leq 0$
$\Longrightarrow P$ est constant

ie $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \mathbb{R}_0[X]$

Réciproquement si $P \in \mathbb{R}_0[X]$ alors $P(X) = a \in \mathbb{R}$

donc $\Phi(P) = (X^2-1) \times 0 + (2X+1) \times 0 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

ie $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]}$

4. $1 \notin \mathrm{Im}(\Phi)$.

En effet on a vu à la question 3. que

si $P \in \mathbb{R}_0[X]$ alors $\Phi(P) = 0 \neq 1$

et sinon $\deg(P) \geq 1$ et alors $\deg(\Phi(P)) \geq 1$

donc $\Phi(P) \neq 1$.

Comme $\mathrm{Im}(\Phi) \neq \mathbb{R}[X]$: $\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjectif}}$

5. Ψ est linéaire car restriction de Φ qui est linéaire.

Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on a vu dans la partie I

que $0\ \Psi(P) = \Phi(P) = 0$ ou $\deg(\Psi(P)) = \deg(\Phi(P)) = \deg P \in \{1; 2; 3\}$

Dans tous les cas $\Psi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Donc Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

6. $\Psi(1) = 0$

$\Psi(X) = 2X+1$

$\Psi(X^2) = (X^2-1).2 + (2X+1).2X = 6X^2+2X-2$

$\Psi(X^3) = (X^2-1).6X + (2X+1).3X^2 = 12X^3+3X^2-X$

Donc $A \overset{def}{=} \underset{\mathcal{B}}{Mat}(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

7. $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-12 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-12)$

car A est triangulaire

$\boxed{\text{Les racines complexes sont : } 0\ ;\ 2\ ;\ 6\ ;\ 12}$

$\lambda = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(A) \iff \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2y + 2z - t = 0 \\ 6z + 3t = 0 \\ 12t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \text{ qcq} \\ y = z = t = 0 \end{cases}$

Donc $Ker(\Psi) = Vect(\underbrace{1}_{\overset{def}{=} P_1})$

(P_1) est une base car $P_1 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\lambda = 2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(A - 2I_4) \iff \begin{cases} -2x + y - 2z = 0 \\ 2z - t = 0 \\ 4z + 3t = 0 \\ 10t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \text{ qcq} \\ y = 2x \\ z = t = 0 \end{cases}$

12

Donc $\mathrm{Ker}(\Psi - 2id) = \mathrm{Vect}(\underbrace{1+2X}_{\stackrel{=}{def} P_2})$. (P_2) est une base car $P_2 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 6I_4) \iff \begin{cases} -6x + y - 2z = 0 \\ -4y + 2z - t = 0 \\ 3t = 0 \\ 6t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{4} z \\ y = \frac{1}{2} z \\ z \text{ qcq} \\ t = 0 \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}(\Psi - 6id) = \mathrm{Vect}(\underbrace{-1+2X+4X^2}_{\stackrel{=}{def} P_3})$. (P_3) est une base car $P_3 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\lambda = 12$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 12I_4) \iff \begin{cases} -12x + y - 2z = 0 \\ -10y + 2z - t = 0 \\ -6z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{12} t \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} t \\ t \text{ qcq} \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}(\Psi - 12id) = \mathrm{Vect}(\underbrace{-1+6X^2+12X^3}_{\stackrel{=}{def} P_4})$. (P_4) est une base car $P_4 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

8. On note $B' = (P_1, P_2, P_3, P_4)$

On a $\det_{B}(B') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 96 \neq 0$

Donc $\underline{B' \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$

Alors $M \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Mat}_{B'}(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

9. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

On calcule Q^{-1}.

$$\begin{cases} x + y - z - t = a \\ 2y + 2z = b \\ 4z + 6t = c \\ 12t = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{d}{6} \\ y = \frac{b}{2} - \frac{c}{4} + \frac{d}{8} \\ z = \frac{1}{4}c - \frac{d}{8} \\ t = \frac{1}{12}d \end{cases}$$

donc $\boxed{Q^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 12 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

10. D'après la formule de changement de bases :

$$A = QMQ^{-1}$$

Par récurrence on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = Q \times M^n \times Q^{-1}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 12 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 2^n & -6^n & -12^n \\ 0 & 2^{n+1} & 2 \times 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 6^n & 6 \times 12^n \\ 0 & 0 & 0 & 12^{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 12 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; A^n = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 3 \times 2^{n+2} & -6 \times 2^n - 6^{n+1} & 3 \times 2^n + 3 \times 6^n - 2 \times 12^n \\ 0 & 3 \times 2^{n+3} & -6 \times 2^{n+1} + 2 \times 6^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 6^{n+1} - 2 \times 6^{n+1} + 12^{n+1} \\ 0 & 0 & 4 \times 6^{n+1} & 2 \times 12^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

et $\boxed{A^0 = I_4}$

Exercice 3

1. $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} 2x+y = 0 \\ -3x-y+z=0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x+y = 0 \\ y+2z=0 & L_2 \leftarrow 2L_2+3L_1 \\ -y-2z=0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ z \text{ qcq} \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((\underbrace{1,-2,1}_{\vec{u_1}}))$

Comme $\vec{u_1} \neq \vec{0}$, $\boxed{(\vec{u_1}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((\underbrace{2,-3,1}_{\vec{v_1}}), (\underbrace{1,-1,0}_{\vec{v_2}}), (\underbrace{0,1,-1}_{\vec{v_3}})\right)$

or $2\vec{v_2} - \vec{v_3} = \vec{v_1}$

donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{v_2}, \vec{v_3})$

Comme $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont non colinéaires : $\boxed{(\vec{v_2}, \vec{v_3}) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$

2. $$M^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Vect}((\underbrace{1,-2,1}_{\vec{a_1}}))$

Comme $\vec{a_1} \neq \vec{0}$: $\boxed{(\vec{a_1}) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f^2)}$

D'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 3 - 1 = 2$

Comme $\vec{a_1} - \vec{a_2} = \vec{0}$ et $\vec{a_2} - \vec{a_3} = \vec{0}$

on a $\underbrace{(1,-1,0)}_{\vec{b_1}} \in \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\underbrace{(0,1,-1)}_{\vec{b_2}} \in \mathrm{Ker}(f^2)$

Comme $\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$ sont non colinéaires la famille $(\vec{b_1}, \vec{b_2})$ est libre maximale dans $\mathrm{Ker}(f^2)$.

Donc $\boxed{(\vec{b_1}, \vec{b_2}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f^2)}$

3. $M^3 = O_3$ donc $\boxed{f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$

4. $\vec{u_1} = \vec{b_1} - \vec{b_2} \in \mathrm{Ker}(f^2)$

donc $\{\vec{0}\} \subsetneq \mathrm{Ker}(f) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^2) \subsetneq \mathbb{R}^3$.

Ces inclusions sont strictes pour des raisons de dimension.

5. On cherche des vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ qui forment une base de $\mathbb{R}^3$ et tels que $\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \vec{0} \\ f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} \\ f(\vec{e_3}) = \vec{e_2} \end{cases}$

Il semblerait que $\overrightarrow{e_3} \notin \mathrm{Ker}(f^2)$.

On essaye avec $\overrightarrow{e_3} \overset{\text{def}}{=} (0,1,1)$

On pose $\begin{cases} \overrightarrow{e_2} \overset{\text{def}}{=} f(\overrightarrow{e_3}) = (1,0,-1) \\ \overrightarrow{e_1} \overset{\text{def}}{=} f(\overrightarrow{e_2}) = (2,-4,2) \end{cases}$

Alors $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+2-(0+(-2)+(-4)) = 8 \neq 0$$

et $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $M = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

1.(a) $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan(x)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

1.(b) Pour $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x^{2n} \geqslant 0$$

$$\text{donc } 0 \leqslant \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leqslant x^{2n}$$

Par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant u_n \leq \int_0^1 x^{2n}\,dx$

$$\text{donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leq \frac{1}{2n+1}}$$

2.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n} \times (1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^{2n}\,dx$$

$$\text{donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}}$$

2.(b) $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times (u_k + u_{k+1})$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} u_k$$

$$= u_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k + (-1)^n u_{n+1}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\underbrace{(-1)^k + (-1)^{k-1}}_{=0}\Big] u_k + (-1)^n u_{n+1}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}}$$

<u>2.(c)</u> D'après 1.(b) on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $|(-1)^n u_{n+1}| = |u_{n+1}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |0| = 0$

Donc $(-1)^n u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$

Donc $\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{\pi}{4}}$