PCSI 1 - DEVOIR MAISON **Année scolaire 2020-2021**
A rendre le mardi 5 janvier 2021

<u>EXERCICE 1</u> : Commutant d'une matrice

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B (appelé commutant de la matrice B). Autrement dit :

$$\mathcal{C}(B) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ BM = MB\}$$

PARTIE A - Quelques propriétés générales du commutant

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On désire prouver quelques propriétés sur $\mathcal{C}(B)$.

1. Donner trois éléments évidents de $\mathcal{C}(B)$.
2. Montrer que, si M et M' sont dans $\mathcal{C}(B)$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda M + \mu M'$ est un élément de $\mathcal{C}(B)$.
   On dit que l'ensemble $\mathcal{C}(B)$ est stable par combinaison linéaire.
3. Montrer que, si M et M' sont dans $\mathcal{C}(B)$, alors MM' est un élément de $\mathcal{C}(B)$.
   On dit que l'ensemble $\mathcal{C}(B)$ est stable par produit.
4. Déduire des questions précédentes que toute matrice s'écrivant comme « un polynôme en B », c'est-à-dire de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k B^k$ avec $p \geq 0$ et $(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ est élément de $\mathcal{C}(B)$.
5. Montrer que si $M \in \mathcal{C}(B)$ et M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{C}(B)$.
   On dit que l'ensemble $\mathcal{C}(B)$ est stable par passage à l'inverse.
6. Comparer ${}^tBB$ et $B{}^tB$ pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. L'ensemble $\mathcal{C}(B)$ est-il stable par transposition ? Quelle hypothèse peut-on faire sur B pour que cette propriété soit satisfaite ?

PARTIE B - Commutant d'une matrice 3×3

A désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

7. On pose $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
8. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.
9. Prouver que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence suivante :
$$M \in \mathcal{C}(A) \Longleftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$$
10. Montrer que les éléments de $\mathcal{C}(D)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ où a, b, c, d et e sont des réels.
11. En déduire une description des matrices de $\mathcal{C}(A)$ comme combinaison linéaire de cinq matrices que l'on déterminera.

<u>EXERCICE 2</u> : Sinus itéré

Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable pour la fonction sin et que :
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) < x$$
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement décroissante.
3. Montrer qu'elle converge vers 0.
4. [$*$] Montrer que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
5. [$*$] En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - \sin(x)}{x^3} = \dfrac{1}{6}$ puis en remarquant que :
$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - \sin(x)}{x^3} \times \frac{1 + \frac{\sin(x)}{x}}{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}$$
vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{3}$.
6. [$*$] En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right) = \dfrac{1}{3}$.
7. [$*$] On admet dans cette question le théorème de Césaro : si (z_n) est une suite de nombres complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ alors $\dfrac{z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Montrer que $\dfrac{1}{nu_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$.
8. [$*$] Conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

<u>EXERCICE 3</u> : Terme général d'une suite récurrente

Déterminer en fonction de n le terme u_n des suites réelles suivantes :

1. $u_8 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - 3$
2. $u_5 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$
3. $u_{11} = 30$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$
4. $u_4 = -2$ et $u_{n+1} = -u_n + 2$
5. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$
6. $u_{10} = -1$ et $u_{n+1} = -u_n$
7. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (-1)^n u_n$
8. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$
9. $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
10. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
11. $u_0 = 0$ et $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$
12. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
13. $u_0 = 1,\ u_1 = \mathrm{e}^4$ et $u_{n+2} \times (u_n)^4 = (u_{n+1})^4$
14. $u_0 = 1$ et $u_n = nu_{n-1} + n!$