PCSI 1 - DEVOIR MAISON Chaînes de Markov **Année scolaire 2020-2021**
A rendre le mercredi 24 mars 2021

<u>PROBLEME 1</u> : Étude d'une chaîne de Markov

On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1,2,3 et 4.

On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit les évènements :
A_n = « au bout de n tirages on a eu toujours le même numéro » ;
B_n = « au bout de n tirages on a eu en tout deux numéros distincts » ;
C_n = « au bout de n tirages on a eu en tout trois numéros distincts » ;
D_n = « au bout de n tirages on a eu les quatre numéros ».

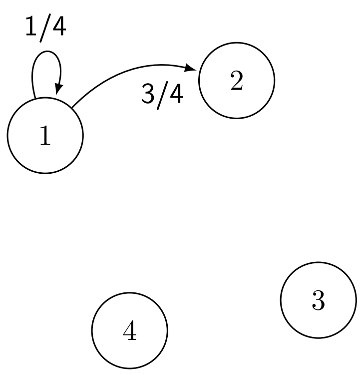
On pose aussi $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$, $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $d_n = \mathbb{P}(D_n)$.

Par exemple, si les premiers tirages donnent $2, 2, 1, 2, 1$ alors B_5 est réalisé.

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, U_n la matrice à 4 lignes et 1 colonne : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer a_1, b_1, c_1 et d_1.
   (b) De même, calculer a_2, b_2, c_2 et d_2.
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \dfrac{1}{4^{n-1}}$.
   (d) Sachant qu'au bout du troisième tirage on a deux numéros distincts, quelle est la probabilité que ce soit aussi le cas à la fin du second tirage ?
2. (a) Pour visualiser l'évolution du nombre de numéros distincts obtenus, entre le tirage n et le tirage $n+1$, on utilise le diagramme de transition suivant, où les nombres placés au-dessus des flèches correspondent aux probabilités de transition (on ne place pas les flèches de probabilité nulle).
   Les probabilités $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})$ ont déjà été placées comme exemple.
   Complétez ce diagramme (**le recopier sur la copie**).



(b) Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation suivante : $U_{n+1} = AU_n$.
Le diagramme n'est pas une preuve...

3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que P est une matrice inversible et déterminer la matrice P^{-1}.

   (b) On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que la matrice D est diagonale.

   (c) En déduire une expression de A^n en fonction de P, D^n et P^{-1}, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (d) Calculer D^n, puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

   (e) En déduire la valeur de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. (a) Donner l'expression de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.
   Comment interpréter ce résultat ?