PCSI 1 - DEVOIR MAISON **Année scolaire 2020-2021**
A rendre le mardi 2 mars 2021

EXERCICE 1 : Factorisation d'un polynôme.

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + (b-a)X^3 + (2a-3b)X^2 + (a-2b)X + 1$ où a et b sont, pour l'instant, deux indéterminées réelles.

1. Déterminer a et b pour que 1 soit racine multiple du polynôme P.

Désormais, a et b auront ces valeurs.

2. Quel est alors l'ordre de multiplicité m de 1 comme racine de P ?
3. Donner la factorisation, en produit d'irréductibles, de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$.
4. Donner la factorisation, en produit d'irréductibles, de $P(X^2)$ sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$.

EXERCICE 2 : Etude des n-codes.

Une serrure de coffre-fort possède n boutons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 1$). Un n-code consiste à pousser dans un certain ordre tous les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

La modélisation est effectuée de la façon suivante : pour tout entier $n \geq 1$, on appelle n-code toute suite ordonnée $(P_1, P_2, \ldots, P_j)$ de j parties de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $1 \leq j \leq n$; ces parties sont toutes non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est égale à l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

On note a_n le nombre de n-codes.

Par exemple :

- pour $n = 1$, il y a un seul 1-code qui est $(\{1\})$.
- pou $n = 2$, il y a trois 2-codes qui sont obtenus avec $(\{1\}, \{2\})$ et $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$. Le premier 2-code consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, le deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, le troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2.

Par convention, on pose $a_0 = 1$.

1. **Préliminaires - questions de cours.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il n'est pas demandé de démonstration dans les quatre questions suivantes.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ possédant k éléments ?
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'applications de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$?
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'injections de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$?
   (d) Quel est le nombre de bijections de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$?
2. **Quelques exemples.** Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
   (a) Soit $n \geq 1$. Combien y a-t-il de n-codes pour lesquels les boutons sont poussés l'un après l'autre ?
   (b) On choisit, dans cette question, $n = 3$: dresser la liste exhaustive des 3-codes et déterminer la valeur de a_3.

3. **Une formule de récurrence.** Soit $n \geq 1$ et $S = (P_1, P_2 \dots, P_j)$ un n-code.
   (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$: combien y a-t-il de choix possibles pour la partie P_1 lorsque l'on impose $\text{Card}(P_1) = k$?
   (b) Combien y a-t-il de n-codes S dont le premier élément P_1 possède k éléments ?
   (c) Montrer : $\quad a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} \qquad$ puis $\qquad a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k$
   (d) Vérifier, à l'aide de la formule précédente, la valeur de a_3 trouvée à la question 2.(b).
4. **Une majoration de a_n.**
   (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:
$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$$
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale T_n par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
   A l'aide d'un raisonnement par récurrence, prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, \quad \mathrm{e}^x \geq T_n(x)$$
   Indication : qui est $T'_{n+1}(x)$?
   (c) En déduire : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leq \dfrac{1}{\ln(2)^n}$
5. **Liens entre les a_n et une fonction f.** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty, \ln(2)[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^x}$$
   (a) Justifier que f est de classe C^∞ sur I.
   (b) Pour tout entier $n \geq 1$, dériver n fois, par rapport à x, la quantité $f(x) \times (2 - \mathrm{e}^x)$.
   (c) Pour $n \geq 1$, en déduire une expression de $f^{(n)}(0)$)à l »aide de $f^{(0)}(0)$, $f^{(1)}(0)$,…,$f^{(n-1)}(0)$.
   (d) Justifier alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = f^{(n)}(0)$$
   (e) Calculer le développement limité, au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3, de $f(x)$.
   Vérifier à nouveau la validité de la valeur de a_3 trouvée à la question 2.(b).

Les questions suivantes sont largement indépendantes de ce qui précède.

6. **Construction d'une suite de polynômes.**
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\mathrm{e}^x)}{(2 - \mathrm{e}^x)^{n+1}} \qquad (*)$$
   Dans l'hérédité, on aura établi une relation du type :
$$P_{n+1}(X) = X\big(\alpha_n P_n(X) + (\beta_n + \gamma_n X) P'_n(X)\big)$$
   où α_n, β_n et γ_n sont des réels, dépendant de n, que l'on précisera.
   (b) Donner les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.
   (c) Prouver, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, que P_n est de degré n. Quel est son coefficient dominant ?
   (d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, que vaut $P_n(0)$? Que représente $P_n(1)$?
7. **Etude d'une racine de P_n.**
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence d'un polynôme Q_n tel que $P_n(X) = XQ_n(X)$.
   (b) Quelle relation a-t-on entre Q_{n+1}, Q_n et Q'_n ?
   (c) On définit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = Q_n(0)$. Déterminer u_n en fonction de n.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 0 est une racine simple de P_n.