PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 3 **Année scolaire 2020-2021**
Samedi 28 novembre 2020

Durée du devoir : 2h00

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 3.

On définit trois fonctions g_1, g_2 et g_3 sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_1(t) = \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad g_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(t) \quad \text{et} \quad g_3(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin(t)$$

On note (H) l'équation différentielle $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$. On dira que y est *solution* de (H) lorsque y est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'''(t) + 5y''(t) + 9y'(t) + 5y(t) = 0$$

1. Montrer que g_1 est solution de (H).

2. Montrer que g_2 est solution de (H).

On admettra dans la suite que g_3 est elle aussi solution de (H).

3. Justifier que pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$ est solution de (H).

Le but de la suite de l'exercice est d'établir que la réciproque de l'assertion obtenue dans la question précédente est vraie, c'est-à-dire que toute solution de (H) peut s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions g_1, g_2 et g_3.

On considère une fonction y solution de (H).

4. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y''(t) + 4y'(t) + 5y(t)$. Montrer que z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) + z(t) = 0$$

5. En déduire qu'il existe un réel λ_1 tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2\lambda_1 \mathrm{e}^{-t}$$

6. Conclure qu'il existe deux réels λ_2 et λ_3 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t) + \lambda_3 g_3(t)$$

Exercice 2 : Intégrales de Wallis et formule $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$

Pour tout entier natuel n on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $I_0=\dfrac{\pi}{2}$, $I_1=\dfrac{\pi}{4}$ et $I_2=\dfrac{3\pi}{16}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$.

(a) Montrer que $I_{n+1}-I_n=-\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)\times\sin(t)\cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t$.

(b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties que $I_{n+1}-I_n=-\dfrac{1}{2n+1}I_n$.

3. Vérifier par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n on pose $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}t^2\cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t$.

4. Calculer J_0.

5. En effectuant deux intégrations par parties successives, établir que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad I_n=n(2n-1)J_{n-1}-2n^2J_n$$

6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Vérifier que $\dfrac{2^{2n-1}(n!)^2}{n^2(2n)!}\times I_n=\dfrac{\pi}{4n^2}$.

Déduire alors de la question précédente que si on pose $K_n=\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\times J_n$ alors :

$$\frac{\pi}{4n^2}=K_{n-1}-K_n$$

7. Démontrer que :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^3}{24}-K_N$$

8. Pour tout réel $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose : $f(x)=1-\dfrac{\pi}{2}\cos(x)$. Etablir que la fonction f est une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers J, où J est un intervalle que l'on précisera.

9. Déduire de la question précédente que la fonction f s'annule en un unique réel α tel que : $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ (on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de α). En déduire le signe de f sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (distinguer deux cas).

10. Démontrer que pour tout réel $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $x\leq\dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.

11. Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$0\leq K_n\leq\frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

12. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi^2}{6}$$