PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N$^\circ$4 **Année scolaire 2020-2021**
Samedi 9 janvier 2021

Durée du devoir : 2h00

Exercice 1 : Calcul de limites à l'aide d'équivalents.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Montrer que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ et en déduire la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\times\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3 e^{1/n}}$$

Exercice 2 : Calcul matriciel.

On pose $j = e^{i2\pi/3} = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On se donne trois nombres complexes a, b et c tels que :

$$\begin{cases} a+b+c &= 1 \\ a+jb+j^2c &= \dfrac{1+j^2}{2} \\ a+j^2b+jc &= \dfrac{1+j}{2} \end{cases}$$

On considère aussi les matrices complexes $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Vérifier que $j^2 = \overline{j}$ et que j et j^2 sont les racines complexes de l'équation $z^2+z+1=0$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Soit n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$A^2 \text{ est inversible} \iff A \text{ est inversible}$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $C = BQ$. Comment se déduit la matrice C de la matrice B ?

$\boxed{\textbf{4.}}$ Calculer Q^2, en déduire que Q est inversible et donner Q^{-1}.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Calculer V^2, en déduire que V est inversible et que V^{-1} est de la forme $\dfrac{1}{m}VQ$ où m est un entier naturel non nul à préciser.

$\boxed{\textbf{6.}}$ En remarquant que $\begin{pmatrix} 1 \\ (1+j^2)/2 \\ (1+j)/2 \end{pmatrix} = V \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, déterminer les nombres complexes a, b et c.

<u>Exercice 3</u> : Etude de deux suites.

On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n \mathrm{e}^{-x^2} - 1 = 3x^n \exp(-x^2) - 1$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soit $n \geq 2$. Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

$\boxed{\textbf{2.}}$ Soit $n \geq 2$. Etudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n, qui vérifient $0 < u_n < 1 \leq \sqrt{\dfrac{n}{2}} < v_n$.

Indication : on pourra utiliser le théorème de la bijection monotone sur les intervalles $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ *et* $\left]\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

$\boxed{\textbf{4.}}$ Soit $n \geq 2$.

- $\boxed{\textbf{(a)}}$ Calculer $\exp(-u_n^2) = \mathrm{e}^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
- $\boxed{\textbf{(b)}}$ En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
- $\boxed{\textbf{(c)}}$ Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
- $\boxed{\textbf{(d)}}$ Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. Soit ℓ sa limite. Vérifier que $0 \leq \ell \leq 1$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Soient $n \geq 2$ et g_n définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) = \ln(3) + n \ln(x) - x^2$.

- $\boxed{\textbf{(a)}}$ Soit $x > 0$. Montrer que $g_n(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$.
- $\boxed{\textbf{(b)}}$ On suppose que $\ell \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?
- $\boxed{\textbf{(c)}}$ Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie par : $w_n = u_n - 1$. Déterminer la limite de $n \ln(1 + w_n)$ lorsque $n \to +\infty$ et en déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1 - \ln(3)}{n}$.