PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 6 **Année scolaire 2020-2021**
Samedi 10 avril 2021

Durée du devoir : 4h00

Exercice 1 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$

Notation. Dans cet exercice, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux familles de vecteurs d'un même espace vectoriel on notera $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ la famille obtenue en les *concaténant.*

Soient $\overrightarrow{u_1} = (1, -1, 0, 2)$, $\overrightarrow{u_2} = (2, 1, 3, 1)$, $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ et $\mathbb{F} = \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. Soit $\mathbb{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ;\ 2x + y - z + t = -x - y + z = 0\}$.

1. **(a)** Montrer que $\mathbb{G}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner en une base notée $\mathcal{G}$. Donner $\dim(\mathbb{G})$.

(b) $\mathbb{G}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

2. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4 - \mathbb{G}$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{G} \cup (\overrightarrow{u})$ est libre.

3. **(a)** Déterminer une base de $\mathbb{F}$ et donner la dimension de $\mathbb{F}$.

(b) Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant $\mathbb{F}$.

4. Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$? Donner la dimension de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.

5. Posons $\mathcal{G}' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ avec $\overrightarrow{v_1} = (-1, 0, -1, 0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 2, -1)$, et posons $\mathbb{G}' = \text{Vect}(\mathcal{G}') = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.
Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}'$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ et que $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

6. **(a)** Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w_1} = (1, 1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{w_2} = (4, 3, 1, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$ définie à la question précédente.

(b) Dans cette question $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ sont les vecteurs dont les cooordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $(2, 1, 3, 0)_{\mathcal{B}}$, $(0, -2, -1, 3)_{\mathcal{B}}$ et $(4, 1, 2, -1)_{\mathcal{B}}$. Déterminer leurs coordonnées respectives dans la base canonique notée $\mathcal{B}_c = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$.

Exercice 2 : Une suite d'intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

2. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

3. Montrer que (u_n) converge vers 1.

4. A l'aide d'une IPP vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

5. Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $\ln(1+x^n) \leq x^n$. En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 : Une équation différentielle linéaire d'ordre 3

On considère les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} y^{(3)} - y &= 0 \qquad (E_1)\\ y' - y &= 0 \qquad (E_2)\\ y'' + y' + y &= 0 \qquad (E_3) \end{aligned}$$

On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des solutions de (E_1) (ie les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivables telles que $y^{(3)} - y = 0$), $\mathbb{F}$ l'ensemble des solutions de (E_2) et $\mathbb{G}$ l'ensemble des solutions de (E_3).

1. **(a)** Montrer que $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel.

(b) Montrer que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ et que $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{E}$.

2. **(a)** Résoudre (E_2) et (E_3).

(b) Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ et déterminer une base de $\mathbb{F}$ et une base de $\mathbb{G}$.

3. **(a)** Soit $y \in \mathbb{E}$. On pose $y_1 = y'' + y' + y$ et $y_2 = 2y - y' - y''$.
Montrer que $y_1 \in \mathbb{F}$ et que $y_2 \in \mathbb{G}$.

(b) Montrer que : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

(c) En déduire une base de $\mathbb{E}$ et la dimension de $\mathbb{E}$.

(d) Résoudre (E_1).

<u>Exercice 4</u> : La constante d'Euler

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

On définit aussi une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = H_n - \ln(n+1)$$

2. **(a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que :

$$0 \leq a_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0,1]$.

3. En utilisant un changement de variable affine, vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_k = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{t}{t+k}\,\mathrm{d}t$$

puis montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq a_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

4. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geq 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}$$

5. Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que :

$$0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$$

7. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.