PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 7 **Année scolaire 2020-2021**
Samedi 29 mai 2021

Durée du devoir : 4h00

<u>Exercice 1</u> : Variables aléatoires discrètes finies

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.
On pose $N = N_1 + N_2$.
On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.
À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N + 2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k-ième expérience.
Pour tout k non nul, on note B_k l'évènement « la boule tirée lors de la k-ième expérience est blanche ».

Préliminaire

Si X et Y sont deux VARD finies montrer que pour tout évènement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}_{(X=k)}(B) \qquad (*)$$

et montrer aussi que :

$$\forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = j) \qquad (**)$$

Dans toute la suite de l'exercice on pourra utiliser ces formules sans les jusitifier, sous le nom de formules $(*)$ et $(**)$.

I. Étude d'un cas particulier

On suppose ici que $N_1 = N_2 = 1$, donc $N = 2$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Déterminer la loi de X_1.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Déterminer a loi de X_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Donner $X_n(\Omega)$.

(b) **(i)** Pour $k \in X_n(\Omega)$ et $j \in [\![2, n+2]\!]$ calculer $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = j)$ en fonction de j (on pourra distinguer les cas $k = j-1$, $k = j$ et $k \notin \{j-1; j\}$).

(ii) En déduire à l'aide de la formule $(**)$ que, pour tout $j \in [\![2, n+2]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \left(1 - \frac{j}{n+2}\right) \times \mathbb{P}(X_n = j) + \frac{j-1}{n+2} \times \mathbb{P}(X_n = j-1)$$

(c) Justifier que la formule précédente est valable aussi si $j = 1$.

(d) Prouver alors par récurrence que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la formule $(*)$ et de la VARD X_{n-1}, vérifier que $\mathbb{P}(B_n) = \dfrac{1}{2}$.

II. Retour au cas général

On suppose ici que N_1 et N_2 quelconques dans $\mathbb{N}^*$.

5. Déterminer la probabilité des évènements B_1 et B_2.

6. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$.

(a) Déterminer $X_n(\Omega)$.

(b) À l'aide de la formule $(*)$ et de la VARD X_{n-1}, montrer que :

$$(N + n - 1) \times \mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k \times \mathbb{P}(X_{n-1} = k)$$

(c) Soit $k \in [\![N_1; N_1 + n - 1]\!]$.

(i) Déterminer la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$.
On les trouvera directement à partir de la modélisation de l'énoncé.

(ii) En déduire que :

$$\mathbb{P}(B_{n+1} \cap (X_{n-1} = k)) = \frac{k}{N+n} \times \mathbb{P}(X_{n-1} = k) + \frac{1}{N+n} \times \mathbb{P}(B_n \cap (X_{n-1} = k))$$

(*On pourra utiliser le système complet d'événements* $(B_n, \overline{B_n})$).

(d) Conclure que $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déduire des questions précédentes la probabilité de B_n.

(b) Montrer à partir des questions précédentes que : $E(X_n) = \dfrac{(N+n)N_1}{N}$.

(c) Vérifier dans le cas où $N_1 = N_2 = 1$ la cohérence avec les résultats de la partie II.

Exercice 2 : Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Soit Φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$$

I. Étude de Φ

1. Montrez que si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré n.

2. Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3. Vérifier que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]$ (ensemble des polynômes constants).

4. Φ est-il surjectif ?

II. Représentation matricielle de Φ

On appelle Ψ la restriction de Φ à $\mathbb{E} = \mathbb{R}_3[X]$.

5. Montrez que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

6. Déterminez la matrice A de Ψ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

7. Déterminer les racines complexes λ du polynôme $\chi(\lambda) = \det(\lambda.\mathrm{id} - \Psi)$.
Déterminez pour chacune de ces valeurs une base de $\mathrm{Ker}(\Psi - \lambda.\mathrm{id})$.

8. Déduisez-en l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice représentative de Ψ s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

9. Explicitez la matrice de passage $Q = P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'}$ et calculez Q^{-1}.

10. À l'aide des questions précédentes, déterminez l'expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Déterminez une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2. Déterminez une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$.

3. Que dire de l'endomorphisme f^3 ?

4. Montrer que $\{\overrightarrow{0}\} \subseteq \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ et que ces inclusions sont strictes.

5. Déterminez une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Ecrire la formule de changement de base associée.

<u>Exercice 4</u> : Etude d'une série

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ $\boxed{\textbf{(a)}}$ Calculer u_0.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ $\boxed{\textbf{(a)}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$.

$\boxed{\textbf{(c)}}$ Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa somme.