Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $P(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1 \Longrightarrow |P(z)| = 1$

On a donc $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$

On peut donc le noter $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

où $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$

Si $z \in \mathbb{U}$ on a $\overline{z} = \frac{1}{z}$ car $z\overline{z} = |z|^2 = 1$

~~Donc~~ $\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, z^{-k}$

donc $z^n \times \overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, z^{n-k}$

On pose alors $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, X^{n-k} \in \mathbb{C}[X]$

On a $\forall z \in \mathbb{U}$, $P(z) Q(z) = z^n P(z) \overline{P(z)}$

$= z^n |P(z)|^2 = z^n$

car $P(z) \in \mathbb{U}$

Le polynôme $PQ - X^n$ a donc une infinité de racines : il est donc nul.

Donc $PQ = X^n$

Donc $P \mid X^n$.

Donc $P = cX^d$ où $c \in \mathbb{C}^*$ et $d \in \mathbb{N}$

Si $|z| = 1$ on doit avoir $|P(z)| = 1$

donc $|c| = 1$

donc $c \in \mathbb{U}$

Ainsi $\boxed{P = cX^d \text{ avec } c \in \mathbb{U} \text{ et } d \in \mathbb{N}}$

$\boxed{\text{La réciproque est immédiate}}$

Exercice 2

1. $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 \underbrace{t^n (t-1)\sqrt{1-t^2}}_{\leq 0}\, dt \leq 0$

donc $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante.}}$

$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt \underset{t = \cos\theta}{=} \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-\sin\theta\, d\theta)$

$= \int_0^{\pi/2} |\sin\theta| \sin\theta\, d\theta \underset{\substack{\sin \geq 0 \\ \text{sur } [0\ \pi/2]}}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

$a_1 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{2}\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$

2. $a_{n+2} = \int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\, dt$ on pose $\begin{cases} u(t) = t^{n+1} \\ v'(t) = t\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

donc $\begin{cases} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = -\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} \end{cases}$

Par IPP :

$$a_{n+2} = \left[-\frac{t^{n+1}}{3}(1-t^2)^{3/2} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(n+1)}{3} t^n (1-t^2)^{3/2} dt$$

$$= 0 - 0 + \frac{n+1}{3}\left(\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\, dt - \int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\, dt \right)$$

$$= \frac{n+1}{3}(a_n - a_{n+2}) \quad \text{car } (1-t^2)^{3/2} = (1-t^2)\sqrt{1-t^2}$$

Donc $\boxed{a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n}$

3. On pose $x_n = (n+3)(n+2)(n+1) a_{n+1} a_n$

Alors $x_{n+1} = (n+4)(n+3)(n+2) a_{n+2} a_{n+1}$

$= (n+3)(n+2)(n+1) a_n a_{n+1} = x_n$

Donc $\boxed{(x_n) \text{ est constante.}}$

4. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+1} a_n = x_0$
$= \frac{\pi}{2}$

donc $a_{n+1} a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^3}$

Mais (a_n) est décroissante donc :

$\frac{n+1}{n+4} a_n = a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$

Donc $\frac{n+1}{n+4} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$

donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $a_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n$

Donc $a_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^3}$

Comme $a_n \geqslant 0$: $\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\, n^{3/2}}}$

5. $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$ par comparaison à une série de Riemann.

Exercice 3

$$S_1 = P(A_1) + P(\overline{A_1}) = 1$$

$$S_2 = P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A_1}) = 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $S_n = 1$.

$$S_{n+1} = \sum_{(B_1, \dots, B_{n+1}) \in \mathcal{E}_{n+1}} \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_{n+1})$$

$$= \underbrace{\sum_{(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{E}_n} \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n \cup A_{n+1})}_{\text{cas où } B_{n+1} = A_{n+1}} + \underbrace{\sum_{(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{E}_n} \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n \cup \overline{A_{n+1}})}_{\text{cas où } B_{n+1} = \overline{A_{n+1}}}$$

$$= \sum_{(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{E}_n} \underbrace{\left[\mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n \cup A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n \cup \overline{A_{n+1}})\right]}_{= \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n)}$$

$$= S_n = 1$$

Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = 1}$

Exercice 4

Si M existe alors $M^6 = (M^2)^3 = O_3$

donc M est nilpotente.

Montrons par l'absurde que $M^3 = O_3$:

On suppose $M^3 \neq O_3$.

Si $X \neq O_{3,1}$ mq (X, MX, M^2X, M^3X) est libre. Pour cela on se donne $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$

tq $aX + bMX + cM^2X + dM^3X = O_{3,1}$

On multiplie par M^3 : $a\underbrace{M^3X}_{\neq O_{3,1}} = O_{3,1}$

donc $a=0$

On réinjecte : $bMX + cM^2X + dM^3X = O_{3,1}$

On multiplie par M^2 : $bM^3X = O_{3,1}$ donc $b=0$

On réinjecte : $cM^2X + dM^3X = O_{3,1}$

On multiplie par M : $cM^3X = O_{3,1}$ donc $c=0$

On réinjecte : $dM^3X = O_{3,1}$ donc $d=0$

Donc (X, MX, M^2X, M^3X) est libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

Donc $\underbrace{\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}))}_{=3} \geqslant 4$ Absurde

Donc $M^3 = O_3$.

Mais alors $M^4 = O_3$

C'est absurde car $M^4 = (M^2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc M n'existe pas.